

Задача №1. (40 баллов) Четыре робота - Аз, Буки, Веди и Глаголь - участвовали в соревнованиях и заняли первые четыре места. На вопрос, кто какое место занял, были получены следующие ответы:

- 1) Аз был первым, Буки - четвёртым;
- 2) Буки был третьим, Веди был четвёртым;
- 3) Веди занял первое место, а Глаголь - третье место.

Известно, что в каждом из этих ответов одна часть верна, а другая неверна.

Определите, какое место занял каждый из роботов. В ответ запишите последовательность заглавных букв, соответствующих первым буквам названий роботов, **от первого до четвёртого места**, например, АБВГ.

Ответ: АБГВ.

Решение

Перепишем условие, представив имеющиеся у нас данные в виде логического уравнения.

A_1 - Аз был первым (или) Буки - четвёртым

$A_1 + B_4$ - Аз был первым (или) Буки - четвёртым

Так как одна из частей ответа гарантирована истинна, то все значение выражения равно 1.

$$A_1 + B_4 = 1$$

Перепишем остальные два ответа в виде уравнений:

$$B_3 + V_4 = 1$$

$$V_1 + G_3 = 1$$

Решим данные уравнения в системе:

$$A_1 + B_2 = 1(1)$$

$$B_3 + V_4 = 1(2)$$

$$V_1 + G_3 = 1(3)$$

Перемножим (2) и (3) уравнение:

$$(B_3 + V_4)(V_1 + G_3) = 1$$

$$B_3V_1 + B_3G_3 + V_4V_1 + V_4G_3 = 1$$

Так как Веди не может одновременно занимать 1 и 4 место, то

$$V_4V_1 = 0$$

$$B_3V_1 + B_3G_3 + V_4G_3 = 1$$

Так как Буки и Глаголь не могут одновременно занимать 3 место, то

$$B_3G_3 = 0$$

$$B_3V_1 + V_4G_3 = 1$$

Умножим полученное уравнение на (1) уравнение:

$$(A_1 + B_4)(B_3V_1 + V_4G_3) = 1$$

$$A_1B_3V_1 + B_4B_3V_1 + A_1V_4G_3 + B_4V_4G_3 = 1$$

$$A_1B_3V_1 = 0 \text{ и } B_4B_3V_1 = 0 \text{ и } B_4V_4G_3 = 0$$

$$A_1V_4G_3 = 1$$

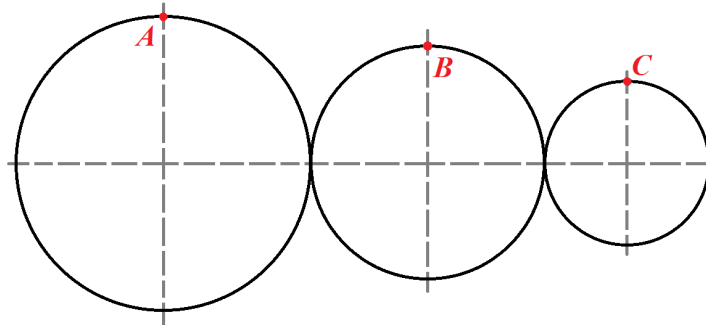
То есть:

Заочный этап. 11 класс

$$A_1 B_2 \Gamma_3 B_4 = 1$$

То есть, Аз был первым, Буки - вторым, Гамма - третьим, а Веди - четвёртым. Значит, ответ имеет вид АБГВ.

Задача №2. (40 баллов) На поле расположены три окружности. Левая окружность радиуса 100 дм, центральная окружность диаметра 150 дм, правая окружность радиуса 50 дм. Окружности расположены так, что они касаются друг друга. Точки старта (точки А, В и С) расположены по одну сторону от линии, соединяющей центры окружностей (см. рисунок), в точках, максимально удалённых от линии, соединяющей центры окружностей.



Рисунок

Робот по левой окружности двигается *против часовой стрелки*. Роботы по центральной и правой окружности двигаются *по часовой стрелке*. Робот, стартовавший в точке А, повернулся на 5100° по окружности. Робот, стартовавший в точке В, повернулся на 1890° по окружности. Робот, стартовавший в точке С, повернулся на 4110° по окружности. Определите, на каком расстоянии оказались роботы, стартовавшие в точках А и С, после остановки. Ответ дайте в **сантиметрах**, приведя результат с точностью до целых. Округление стоит производить только при получении финального результата. Размерами робота можно пренебречь.

Ответ: 4220 см

Решение

Определим угол, на который повернётся робот по левой окружности:

$$5100:360=14 \frac{1}{6} \text{ (об.)}$$

Значит, робот, двигавшийся по левой окружности, в итоге повернётся на 60° против часовой стрелки.

Определим угол, на который повернётся робот по центральной окружности:

$$1890:360=5,25 \text{ (об.)}$$

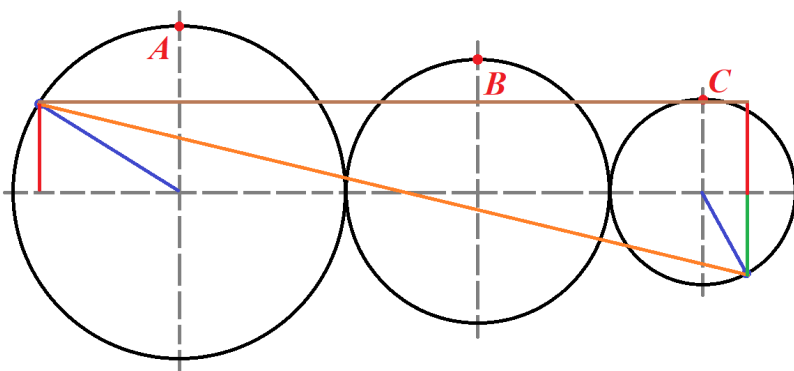
Значит, робот, двигавшийся по центральной окружности, в итоге повернётся на четверть окружности по часовой стрелке.

Определим угол, на который повернётся робот по правой окружности:

$$4110:360=11 \frac{5}{12} \text{ (об.)}$$

Значит, робот, двигавшийся по правой окружности, в итоге повернётся на 150° по часовой стрелке.

Сделаем чертёж:



Можно показать, что роботы находятся на концах гипотенузы с соответствующими катетами.

Расстояние между роботами равно:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{((100\sin(90^\circ - 60^\circ) + 50\sin(150^\circ - 90^\circ))^2 + (100\cos(30^\circ) + 50\cos(60^\circ) + 100 + 50 + 150)^2} \\
 & = \\
 & = \sqrt{(100 * 0,5 + 50 * \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (100 * \frac{\sqrt{3}}{2} + 50 * 0,5 + 300)^2} = \\
 & = \sqrt{(25 * (2 + \sqrt{3}))^2 + (25 * (2\sqrt{3} + 13))^2} = \\
 & = 25\sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3} + 12 + 169 + 52\sqrt{3}} = \\
 & = 25\sqrt{188 + 56\sqrt{3}} = 50\sqrt{47 + 14\sqrt{3}} = 422,044... \text{ (дм)} \\
 & 422,044... \text{ дм} = 4220,44... \text{ см} \approx 4220 \text{ см}
 \end{aligned}$$

Задача №3. (5 баллов) С помощью колеса и мотора собрали моноцикл. Движение с вала мотора на ось колеса передаётся при помощи двухступенчатой передачи. На ведущей оси передачи стоит шестерёнка с 32 зубьями, на ведомой оси первой ступени - с 24 зубьями. На ведущей оси второй ступени стоит шестерня с 24 зубьями, на ведомой оси передачи - с 16 зубьями. Диаметр колеса моноцикла равен 20 см. К моноциклу подсоединена ручка длиной 50 см, которая крепится к оси барабана напрямую. Когда мотор включают, то моноцикл начинает ездить по окружности, приводя во вращение барабан. Диаметр барабана равен 15 см. К барабану привязана тонкая, прочная, нерастяжимая нить, которая будет наматываться на барабан, если ось передачи будет вращаться. Нить наматывается всегда в один слой. Другой конец нити переброшен через систему неподвижных блоков и привязан к заслонке. Определите, сколько оборотов в минуту должна делать ось мотора моноцикла, чтобы заслонка поднялась на высоту 1 м 20 см за 15 секунд. Ответ приведите с точностью до десятых. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 25,5 об/мин.

Решение

15 секунд = 0,25 минуты

1 м 20 см = 120 см

Обозначим за x - число оборотов, которое делает ось мотора моноцикла в минуту.

Тогда колесо моноцикла совершает за 1 минуту:

$$x \cdot (32:24) \cdot (24:16) = 2x \text{ (об./мин.)}$$

Определим, сколько оборотов должна сделать ось мотора моноцикла, чтобы ось барабана сделала 1 оборот:

$$(2\pi \cdot 50) : (20\pi \cdot 2) = 2,5 \text{ (об.)}$$

Так как неподвижные блоки не дают выигрыша в силе и, соответственно, не дают проигрыша в расстоянии, то чтобы сместить заслонку на 120 см, на барабан должно намотаться те же 120 см. Определим, сколько оборотов в минуту должен совершить барабан, чтобы успеть поднять заслонку за требуемое время:

$$(120 : (\pi \cdot 15)) : 0,25 = 32/\pi \text{ (об./мин.)}$$

Тогда ось мотора моноцикла должна совершить:

$$2,5 \cdot 32/\pi \approx 80:3,14 = 25,47770... \approx 25,5 \text{ (об./мин.)}$$

Задача №4 (10 баллов) Робот оснащён двумя одинаковыми колёсами, диаметр которых равен 13 см. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом - мотор В. Ширина колеи равна 24 см. Посередине между колёсами расположен маркер, с помощью которого робот может наносить изображение на плоскость.

Робот выполнил следующие движения:

1. Ось мотора А повернулась на 900° , одновременно с этим ось мотора В повернулась на -600° ;
2. Ось мотора А повернулась на 800° , одновременно с этим ось мотора В повернулась на 400° .

Определите длину линии, которую нарисовал робот. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых. При расчетах примите $\pi \approx 3,14$. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 85 см

Решение

Робот совершил два движения. Оба раза это - движения по дуге.

Первым движением маркер будет поворачиваться по дуге окружности, радиус которой меньше, чем ширина колеи робота. Вторым движением маркер будет поворачиваться по дуге окружности, радиус которой больше, чем ширина колеи робота.

Воспользуемся формулами, связывающие радиус окружности R , по которой движется колесо робота, угол поворота робота α , радиус колеса робота r и угол поворота оси колеса φ_A :

$$R_A \alpha = r \varphi_A$$

$$R_A = \frac{\varphi_A}{\alpha} r$$

$$R_B \alpha = r \varphi_B$$

$$R_B = \frac{\varphi_B}{\alpha} r$$

Так как расстояние между центрами колёсами мы называем колеёй или шириной колеи и знаем его величину L , то можем записать следующее равенство:

$$\begin{aligned} R_A - R_B &= L \\ \frac{\varphi_A}{\alpha} r - \frac{\varphi_B}{\alpha} r &= L \\ \frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{\alpha} r &= L \end{aligned}$$

Обозначим за O точку, расположенную по середине между колёс. Так как маркер расположен по середине между колёс, то:

$$R_O = R_B + L/2 = \frac{\varphi_B}{\alpha} r + \frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{2\alpha} r = \frac{\varphi_B}{\alpha} r + \frac{\varphi_A}{2\alpha} r - \frac{\varphi_B}{2\alpha} r = \frac{(\varphi_A + \varphi_B)}{2\alpha} r$$

Тогда длина дуги, которую начертит маркер, движущийся по окружности радиуса R_O :

$$2\pi R_o \frac{\alpha}{360^\circ} = 2\pi \cdot \frac{(\varphi_A + \varphi_B)}{2\alpha} r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi d \cdot \frac{(\varphi_A + \varphi_B)/2}{360^\circ}$$

Значит, робот начертит линию, состоящую из двух дуг, длиной:

$$\begin{aligned} & \pi d \cdot \frac{(900^\circ - 600^\circ)/2}{360^\circ} + \pi d \cdot \frac{(800^\circ + 400^\circ)/2}{360^\circ} = \\ & = \frac{\pi d}{360^\circ} \cdot \frac{300^\circ + 1200^\circ}{2} = \frac{3,14 \cdot 13}{360} \cdot 750 = 85,041(6) \text{ (см)} \\ & 85,041(6) \text{ (см)} \approx 85 \text{ см} \end{aligned}$$

Задача №5 (5 баллов) В окружность радиуса $R = 20$ дм вписан правильный восьмиугольник. Двумя параллельными диагоналями он делится на три четырёхугольника, два из которых - равны. Через точки пересечения диагоналей равных четырёхугольников проходит окружность меньшего радиуса (см. *Рисунок №1*).

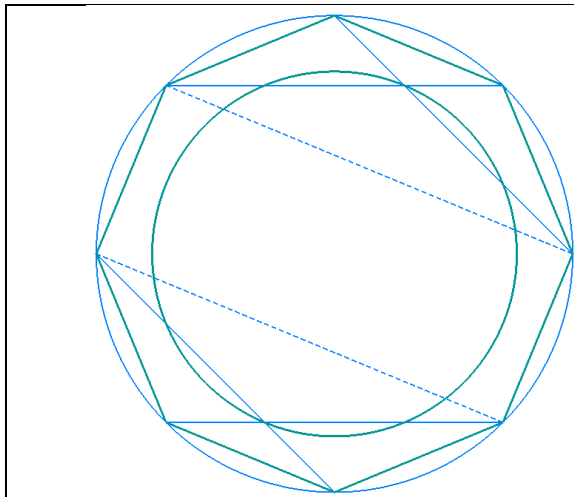


Рисунок №1

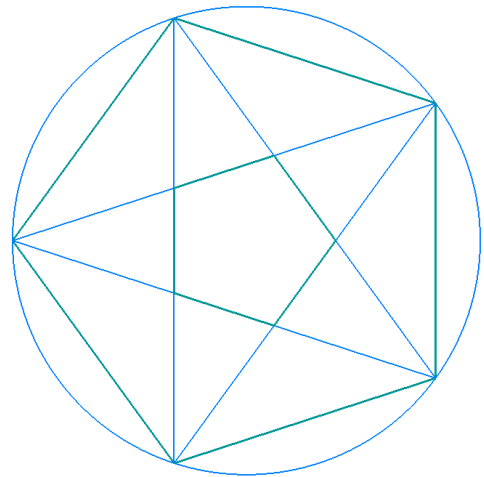


Рисунок №2

В окружность меньшего радиуса вписан правильный пятиугольник. Его диагонали пересекаются таким образом, что образуется меньший пятиугольник (см. *Рисунок №2*). Определите, чему равна площадь меньшего пятиугольника. Ответ дайте в квадратных сантиметрах с точностью до целых. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

Справочная информация

Площадь правильного пятиугольника можно определить по формуле:

$$\frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

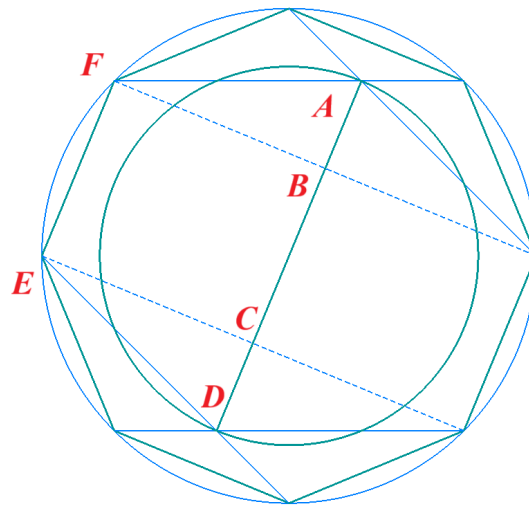
где a - сторона правильного пятиугольника.

Ответ: 10016 см²

Решение

$R=20$ дм = 200 см

Определим длину диаметра меньшей окружности, проходящей через точки пересечения диагоналей (см. *Чертёж*).



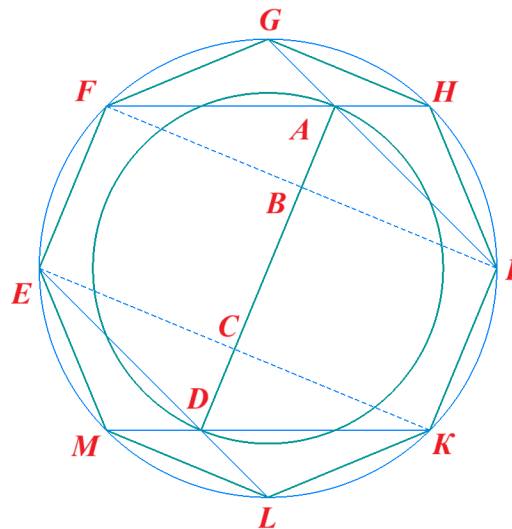
Чертёж

Можно показать, что восьмиугольник диагоналями делится на две равнобедренные трапеции и прямоугольник. Для этого нужно достроить крайний четырёхугольник до треугольника, посчитать его углы и определить, что углы при основании четырёхугольника равны 45° , а, следовательно, центральный четырёхугольник имеет прямые углы и является прямоугольником.

Диаметр меньшей окружности будет равен:

$$AB+BC+CD=CB+2*AB$$

Покажем, что диаметр AD перпендикулярен FI.



Можно показать, что трапеции, на которые делят восьмиугольник две указанные диагонали, равны.

Поскольку данные трапеции равнобедренные, то диагонали трапеций равны. И отрезки $FA=AI$, $GA=AH$.

Если опустить из центра окружности радиусы на концы одной из сторон восьмиугольника, то мы получим равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным:

$$360^\circ:8=45^\circ$$

Определим длину стороны правильного восьмиугольника:

$$\sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(45^\circ)} = R \sqrt{2 - 2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = R \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ (см)}$$

Диагоналями восьмиугольник делится на две равнобедренные трапеции и прямоугольник.

Градусная мера угла правильного восьмиугольника равна:

$$180^\circ \cdot (8-2) / 8 = 135^\circ$$

Длина диагонали равнобедренной трапеции FH=GI равна:

$$\sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(135^\circ)} = R \sqrt{2 + 2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = R \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ (см)}$$

Угол при большем основании трапеции $\angle GFI = \angle HIF$ равен:

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Углы при основании равнобедренного треугольника FGH с углом 135° равны:

$$\angle GFH = \angle GHF = (180 - 135) : 2 = 22,5^\circ$$

Угол FHI равен:

$$135^\circ - 22,5^\circ = 112,5^\circ$$

Длина большего основания FI равно:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(R\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 + (R\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 - 2(R\sqrt{2 - \sqrt{2}} * R\sqrt{2 + \sqrt{2}})\cos\angle FHI} = \\ & = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{2}) + R^2(2 + \sqrt{2}) - 2\sqrt{2}R^2\cos(112,5^\circ)} = \\ & = R\sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)} \end{aligned}$$

Если совместить точку F с точкой E, а точку I с точкой K, то можно показать, что образуется ромб. Его диагонали будут пересекаться под прямым углом. Соответственно, если раздвинуть половинки ромба с помощью параллельного переноса, то перпендикулярность диагоналей сохраниться.

Значит, $\angle ABF = 90^\circ$, значит AB - высота и медиана.

Отрезок FB равен:

$$\begin{aligned} FB &= 0,5 * FI = 0,5R\sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)} \\ \angle AFB &= 45^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ \end{aligned}$$

В прямоугольном треугольнике ABF:

$$AB = FB * \operatorname{tg}\angle AFB = 0,5R * \operatorname{tg}(22,5^\circ) * \sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)}$$

Тогда диаметр AD равен:

$$\begin{aligned} & R\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 2 * 0,5R * \operatorname{tg}(22,5^\circ) * \sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)} = \\ & = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} + R * \operatorname{tg}(22,5^\circ) * \sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)} \end{aligned}$$

Радиус меньшей окружности r_1 равен:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,5 * (R\sqrt{2 - \sqrt{2}} + R * \operatorname{tg}(22,5^\circ) * \sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)}) = \\ &= 0,5 * R(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \operatorname{tg}(22,5^\circ) * \sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)}) = \\ &= 0,5 * 200 * (\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \operatorname{tg}(22,5^\circ) * \sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(112,5^\circ)}) = \\ &= 169,9176611...(\text{см}) \end{aligned}$$

Если опустить из центра окружности радиусы на концы одной из сторон пятиугольника, то мы получим равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным:

$$360^\circ:5=72^\circ$$

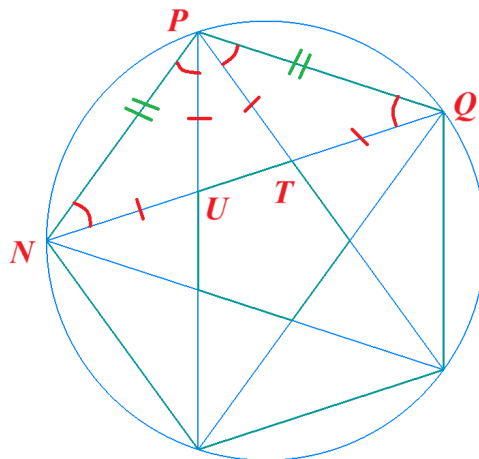
Определим длину стороны правильного пятиугольника:

$$\sqrt{r_1^2 + r_1^2 - 2r_1^2\cos(72^\circ)} = r_1\sqrt{2 - 2\cos(72^\circ)}$$

Градусная мера угла правильного пятиугольника равна:

$$180^\circ * (5-2)/5 = 108^\circ$$

Введём обозначения:



Вычислим длину стороны меньшего пятиугольника:

Рассмотрим равнобедренный треугольник NPQ ($NP=PQ$).

$$\angle PNQ = \angle PQN = 0,5 * (180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$$

Аналогично можно сделать и для остальных четырёх равнобедренных треугольников, таким образом можно показать, что углы $\angle PNU = \angle NPU = \angle PQT = \angle TPQ = 36^\circ$.

То есть, треугольники NUP и QTP - равнобедренные.

Так же, можно показать, что малые тупоугольные равнобедренные треугольники равны между собой (по стороне и двум углам), то есть $NU=UP=PT=TQ=...$

Определим длину отрезков $PT=TQ=PU=NU$:

$$\angle PTQ = 180^\circ - 2 * 36^\circ = 108^\circ$$

По теореме синусов

$$\frac{PQ}{\sin 108^\circ} = \frac{TQ}{\sin 36^\circ}$$

$$TQ = PQ \frac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ} = r1\sqrt{2 - 2\cos(72^\circ)} * \frac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ}$$

$$PT = TQ = PU = NU = r1\sqrt{2 - 2\cos(72^\circ)} * \frac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ}$$

Определим градусные меры углов равнобедренного треугольника TPU:

$$\angle TPU = 108^\circ - 2 * 36^\circ = 36^\circ$$

$$\angle PUT = \angle PTU = (180^\circ - 36^\circ)/2 = 72^\circ$$

Определим длину отрезка UT:

$$\frac{PU}{\sin(72^\circ)} = \frac{UT}{\sin(36^\circ)}$$

$$\begin{aligned} UT &= PU * \frac{\sin(36^\circ)}{\sin(72^\circ)} = r1\sqrt{2 - 2\cos(72^\circ)} * \frac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ} * \frac{\sin(36^\circ)}{\sin(72^\circ)} = \\ &= r1\sqrt{2 - 2\cos(72^\circ)} * \frac{(\sin(36^\circ))^2}{\sin 108^\circ * \sin(72^\circ)} = \\ &= 76,2977835... (\text{см}) \end{aligned}$$

Площадь правильного пятиугольника равна:

$$S = \frac{UT^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 10\,015,5041560... \approx 10016 (\text{см}^2)$$