

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

---

**Задача 1**

**В-1** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 10

**Решение.** Разложим выражение на простые множители:

$$48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1}) = 2^4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^N \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) = 2^{6-N} \cdot 5^{3+N} \cdot 3 \cdot 7.$$

Так как числа 2, 3, 5 и 7 взаимно простые, то данное выражение будет целым, если одновременно выполняются два условия:  $6 - N \geq 0$  и  $3 + N \geq 0$ .

Получается 10 значений.

---

**В-2** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $160000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 8

---

**В-3** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $32000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 11

---

**В-4** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $80000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 7

---

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

---

Задача 2

**В-1** Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме цилиндра высоты 76 сантиметров и радиуса 17 см. Второе — в форме усечённого конуса, верхний круг имеет радиус 15 см, а радиус нижнего основания — 10 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

**Ответ:** 108

**Решение.** Время заполнения ведра водой равно объёму ведра, делённому на скорость набора воды ведром. Воду ведро набирает со скоростью, прямо пропорциональной  $\pi R^2$ , где  $R$  — верхний диаметр ведра. Пусть за секунду один квадратный сантиметр открытой дождею поверхности сечения ведра набирает  $s$  кубических сантиметров воды.

Тогда объём первого ведра  $76 \cdot \pi \cdot (17)^2$ , скорость набора равна  $s\pi \cdot (17)^2$ , время наполнения, следовательно,  $\frac{76 \cdot \pi \cdot (17)^2}{s\pi \cdot (17)^2} = \frac{76}{s}$ . Теперь ищем объём второго ведра. Чтобы найти объём усечённого конуса, достраиваем его до полного, а потом вычтем из его объёма объём вершинки. Если сверху радиус равен  $b$ , снизу —  $a$ , а высота ведра (нам пока неизвестная) равна  $y$ , то тогда до полного конуса нужно добавить к высоте  $h$ , и это  $h = \frac{ay}{b-a}$ , а объём усечённого конуса равен  $\frac{\pi}{3} ((y+h)b^2 - ha^2)$ . Скорость наполнения равна  $s\pi b^2$ , и время наполнения будет равно  $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{3b^2} ((y+h)b^2 - ha^2)$

Приравниваем времена наполнения, подставляем выражение для  $h$ , упрощаем, сокращаем  $s$  и получаем, что  $y = 76 \cdot \frac{3b^2}{b^2 + ba + a^2}$ . С нашими параметрами ( $a = 10, b = 15$ ) придём к ответу 108.

---

**В-2** Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме цилиндра высоты 76 сантиметров и радиуса 18 см. Второе — в форме усечённого конуса, верхний круг имеет радиус 12 см, а радиус нижнего основания — 18 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

**Ответ:** 48

---

**В-3** Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме параллелепипеда с квадратным дном, высотой 56 см и стороной основания 19 см. Второе — в форме усечённой пирамиды с квадратными основаниями, сторона нижнего основания равна 16 см, сторона верхнего — 32 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

**Ответ:** 96

---

**В-4** Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме параллелепипеда с квадратным дном, высотой 84 см и стороной основания 20 см. Второе — в форме усечённой пирамиды с квадратными основаниями, сторона нижнего основания равна 44 см, сторона верхнего — 22 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

**Ответ:** 36

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

---

**Задача 3**

**В-1** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 50

**Решение.** Рассматриваем случаи  $y = x$  и  $y = -x$ . В случае, когда  $x = y$ , имеем:

$$x^2(50 + a) - 2x + \frac{1}{100} \geq 0.$$

В случае, когда  $x = -y$ , имеем:

$$x^2(50 - a) + \frac{1}{100} \geq 0.$$

Рассмотрим сначала случай  $x = y$ . Слева график — парабола. Чтобы неравенство выполнялось для всех  $x$ , необходимо, чтобы ветви были направлены вверх, следовательно,  $50 + a > 0$  и дискриминант был неположительный (покажем про упрощенный дискриминант)

$$1 - \frac{50 + a}{100} \leq 0$$

Из первого неравенства следует, что  $a > -50$ . А из второго  $a \geq 50$ . Следовательно, имеем  $a \geq 50$ .

Аналогично, для случая  $x = -y$  имеем  $a \leq 50$ . Значит,  $a = 50$ .

---

**В-2** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$24y^2 + \frac{1}{96} \geq x - axy + y - 24x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 48

---

**В-3** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$2025y^2 + \frac{1}{8100} \geq x - axy + y - 2025x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 4050

---

**В-4** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$2024y^2 + \frac{1}{8096} \geq x - axy + y - 2024x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 4048

---

**В-5** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$506y^2 + \frac{1}{2024} \geq x - axy + y - 506x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 1012

---

**В-6** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$1012y^2 + \frac{1}{4048} \geq x - axy + y - 1012x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 2024

---

**В-7** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$12y^2 + \frac{1}{48} \geq x - axy + y - 12x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 24

---

**В-8** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$20y^2 + \frac{1}{80} \geq x - axy + y - 20x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 40

---

**Задача 4**

**В-1** Найдите  $\operatorname{tg}|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{tg}|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:** 0.696

**Решение.** Отметим, что вторая скобка не обращается в ноль, так как  $\sqrt{\sin |x|} \leq 1 < \frac{\sqrt{11}}{3}$ . Таким образом, уравнение равносильно системе уравнения и неравенства

$$\begin{cases} \sin |x| \geq 0, \\ 5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение из этой системы — получаем ещё одну систему из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} 5 \sin x + 3 \cos x < 0 \\ 25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2 \end{cases}$$

Решаем уравнение:

$$25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2$$

$$25 \sin^2 x + 30 \operatorname{tg} x \cos^2 x + 9 \cos^2 x = 2$$

Используем замены  $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ .

$$25 \left( \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 30 \operatorname{tg} x \left( \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 9 \left( \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) = 2$$

Умножаем на  $1 + \operatorname{tg}^2 x$ , переносим всё на одну сторону — и получаем квадратное уравнение

$$23 \operatorname{tg}^2 x + 30 \operatorname{tg} x + 7 = 0.$$

Решения уравнения — это  $\operatorname{tg} x = -1$  и  $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$ . В свою очередь,  $\operatorname{tg}|x|$  сможет потенциально принимать такие значения:  $1, -1, \frac{7}{23}, -\frac{7}{23}$  (потому что, обрамляя  $x$  модулем, мы либо оставляем  $x$  как есть, либо умножаем на минус один — а тангенс функция нечётная.) Проверим, подходят ли найденные  $x$  под накопившиеся условия. Перед проверкой условий отметим, что

$$\operatorname{tg}|x| = \frac{\sin |x|}{\cos |x|} = \frac{\sin |x|}{\cos x}.$$

Для выполнения условий нужно, чтобы знак  $\operatorname{tg}|x|$  совпадал со знаком  $\cos x$ .

Когда  $\cos x > 0$ , из неравенства во второй системе следует, что  $\operatorname{tg} x \leq -\frac{3}{5}$ . Значит,  $\operatorname{tg} x = -1$ , но  $\operatorname{tg}|x| > 0$ , поэтому  $\operatorname{tg}|x| = 1$ .

Когда  $\cos x < 0$ , из неравенства во второй системе следует, что  $\operatorname{tg} x \geq -\frac{3}{5}$ . Значит,  $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$ , но  $\operatorname{tg}|x| < 0$ , поэтому  $\operatorname{tg}|x| = -\frac{7}{23}$ .

В ответ идёт  $1 - \frac{7}{23}$ .

---

**В-2** Найдите  $\operatorname{ctg}|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \cos x + 7 \sin x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{ctg}|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:**  $-1.043$

---

**В-3** Найдите  $\operatorname{tg} 2|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \sin 2x + 3 \cos 2x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin 2|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{tg} 2|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:**  $0.696$

---

**В-4** Найдите  $\operatorname{ctg} 3|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \cos 3x + 7 \sin 3x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin 3|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{ctg} 3|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:**  $-1.043$

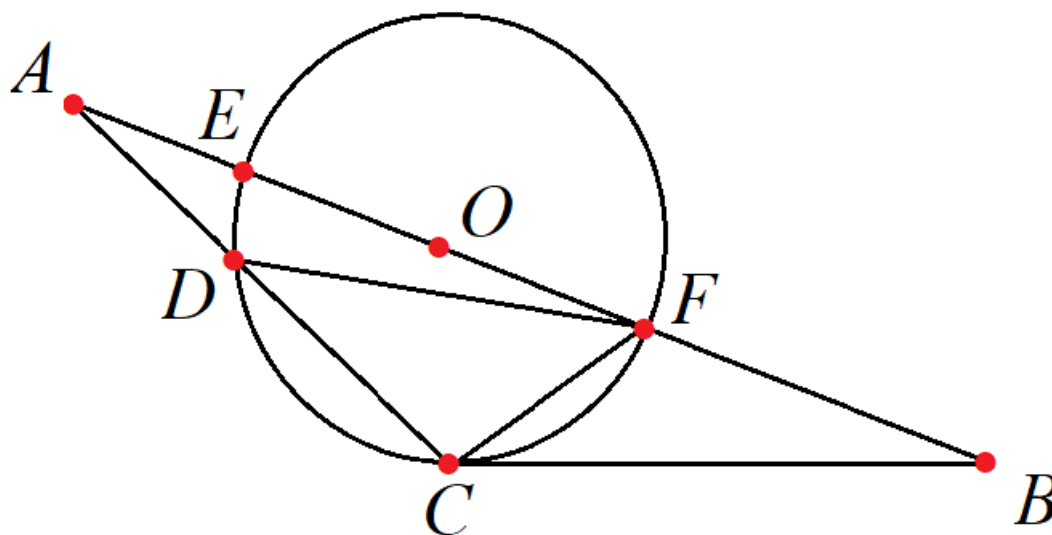
---

### Задача 5

**В-1** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 5$ ,  $FB = 3$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При необходимости округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 14.29

**Решение.**



Так как окружность касается  $BC$ , то  $C$  — точка касания. По теореме о касательной и секущей  $BC^2 = BE \cdot BF \Rightarrow 5^2 = (3 + 2R) \cdot 3 \Rightarrow R = \frac{8}{3}$ .

Продолжим  $CO$  до диаметра. Тогда из точки пересечения этого диаметра с окружностью  $C_1$  (на рисунке не обозначена) на хорду  $DC$  будет опираться угол, равный  $\angle DFC$ . При этом треугольник  $CDC_1$  опирается на диаметр, поэтому он прямоугольный, а угол  $\angle OCB$  прямой, и  $\angle DCB = 90^\circ + \angle OCD$ . Вместе это значит, что  $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$ . Так как  $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$ , а  $\angle DCB - \angle DFC = 90^\circ$  (по условию), то  $\angle DCB = 135^\circ$  и  $\angle DFC = 45^\circ$ . Отсюда соответствующий центральный угол  $\angle DOC = 90^\circ$ , и, так как  $OC$  перпендикулярно  $CB$ , отрезок  $DO$  параллелен  $CB$ .

Тогда

$$\frac{AO}{AB} = \frac{DO}{CB} \Rightarrow \frac{AF - \frac{8}{3}}{AF + 3} = \frac{\frac{8}{3}}{5} \Rightarrow AF = \frac{64}{7} \Rightarrow AB = \frac{85}{7}.$$

Так как

$$\sin \angle ABC = \frac{R}{R + 3} = \frac{8}{17},$$

то

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{7} \cdot 5 \cdot \frac{8}{17} = \frac{100}{7}.$$

**В-2** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 5$ ,  $FB = 4$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При необходимости округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 3.63

**В-3** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке

*F.* Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 6$ ,  $FB = 4$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 12.86

---

**В-4** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 3$ ,  $FB = 2$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 3.21

---

**В-5** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 4$ ,  $FB = 3$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 3.29

---

**В-6** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 7$ ,  $FB = 5$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 12.78

---

**В-7** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 8$ ,  $FB = 5$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 30.44

---

**В-8** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 8$ ,  $FB = 6$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 13.18

---



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

---

**Задача 6**

**В-1** Пусть функция  $f(x)$  имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2024}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции  $f(x)$ , лежащих в интервале  $(0, \frac{1}{20242025})$

**Ответ:** 1999

**Решение.** Решим задачу в более общем случае — заменим 2024 на произвольное  $n$ . Заметим, что  $x = 1$  и  $x = \frac{1}{2^n - 1}$  являются нулями  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(1) \cdot (2^n - 1) &= f(2) \cdot (1 - 1) = 0, \\ f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) &= f\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \left(2^n \cdot \frac{1}{2^n} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Далее, если  $a \neq \frac{1}{2^{n-1}}$  — нуль  $f(x)$ , то  $\frac{a}{2}$  — тоже нуль  $f(x)$ . Действительно, для  $x = \frac{a}{2}$  имеем

$$\begin{aligned} f\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - 1\right) &= f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(2^n \cdot \frac{a}{2} - 1\right) \\ f(a) \cdot \left(\frac{a}{2} - 1\right) &= f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot (2^{n-1} \cdot a - 1) \\ 0 &= f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot (2^{n-1} \cdot a - 1), \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что  $a \neq \frac{1}{2^{n-1}}$ , получаем  $f(\frac{a}{2}) = 0$ . Таким образом  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$  — нули  $f(x)$ .

Докажем, что других нулей нет. Предположим, что  $a$  — какой-то другой нуль. Для  $k = 0, \dots, n-1$  имеем  $a \neq \frac{1}{2^{n-1-k}}$ . Если  $a < 1$ , то для всех  $k \in \mathbb{N}_0$  имеем  $a \neq \frac{1}{2^{n-1-k}}$ , то есть  $\frac{a}{2^k} \neq \frac{1}{2^{n-1}}$ . Значит, получаем бесконечную последовательность корней  $\frac{a}{2^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Противоречие. Если  $a > 1$ , то нетрудно видеть, что  $2a, 4a, \dots, 2^k a, \dots$  — тоже нули  $f(x)$ , и мы опять получили противоречие с условием задачи.

Таким образом, всего имеем  $n$  нулей функции. Когда  $n = 2024$ , на интервале  $(0, \frac{1}{20242025})$  окажутся решения  $\{2^{-2023}, 2^{-2022}, \dots, 2^{-25}\}$ . Так как  $2^{24} = 16777216$ ,  $2^{25} = 33554432$ , то корень  $2^{-25}$  ещё будет лежать в нужном интервале, а  $2^{-24}$  и все последующие — уже нет. В интервал войдёт 1999 корней.

**Примечание.** В выданных участникам вариантах была допущена опечатка — в интервале были поставлены квадратные скобки вместо круглых. Поэтому принимались также ответы 2000, 25, 2001, 25 соответственно в вариантах 1-4.

---

**В-2** Пусть функция  $f(x)$  имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2024}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции  $f(x)$ , лежащих в интервале  $(\frac{1}{20242025}, 1)$

**Ответ:** 24

---

**В-3** Пусть функция  $f(x)$  имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2025}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции  $f(x)$ , лежащих в интервале  $(0, \frac{1}{20252024})$

**Ответ:** 2000

---

**В-4** Пусть функция  $f(x)$  имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2025}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции  $f(x)$ , лежащих в интервале  $(\frac{1}{20252024}, 1)$

**Ответ:** 24

---

## Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

---

### Задача 7

**В-1** Даны два одинаковых шара радиуса 1, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

**Ответ:** 6

**Решение.** Так как расстояние между центрами двух касающихся шаров равно сумме их радиусов, то линии центров шаров образуют многогранник, состоящий из двух равных правильных пирамид. Пусть одна из таких пирамид  $O_1C_1C_2C_3$ , а другая имеет вершину  $O_2$  симметричную  $O_1$  относительно плоскости основания пирамиды, и тоже основание  $C_1C_2C_3$ . Вершины  $C_1, C_2, C_3$  являются центрами шаров неизвестного радиуса. Обозначим этот радиус переменной  $x$ . Тогда  $C_1C_2 = 2x$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры шаров радиуса  $r$ . Поэтому боковое ребро пирамиды равно  $r + x$ , а высота  $r$ . Точка  $O$  — точка касания двух изначальных шаров, или центр равностороннего треугольника  $C_1C_2C_3$ . Так как треугольник  $C_1C_2C_3$  равносторонний, длина  $OC_1 \cdot \sqrt{3} = 2x$ ,  $OC_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ . Из прямоугольного треугольника  $OO_1C_1$  получим

$$\begin{aligned}(r + x)^2 &= r^2 + \left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2, \\ r^2 + 2rx + x^2 &= r^2 + \frac{4}{3}x^2, \\ \frac{1}{3}x^2 &= 2rx, \\ x^2 &= 6rx, \\ x &= 6r.\end{aligned}$$

---

**В-2** Даны два одинаковых шара радиуса 5, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

**Ответ:** 30

---

**В-3** Даны два одинаковых шара радиуса 7, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

**Ответ:** 42

---

**В-4** Даны два одинаковых шара радиуса 11, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

**Ответ:** 66

---

## Задача 8

**В-1** 11 друзей катаются на катке в форме правильного 22-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 1862080

**Решение.** Ясно, что в одной точке не могут пересечься траектории более двух друзей – иначе число пересечений можно увеличить, немного подвинув траектории. При этом точек пересечения разных траекторий конечное число, потому что никто не ехал по диагонали (т.к. нет отпечатков в углах). Для вычисления можно считать, что траектория движения каждого из друзей состоит из параллельных линий (они будут перпендикулярны соответствующей данному другу паре бортиков). Число линий равно 2024. И если каждый  $j$ -й друг прочертил  $n_j$  линий, то  $n_1 + n_2 + \dots + n_{11} = 2024$ . Теперь нам нужно максимизировать число пересечений, т.е. сумму всевозможных величин  $n_k \cdot n_l$  при различных  $k, l$ . Ясно (но это требует доказательства!), что максимум достигается при  $n_1 = n_2 = \dots = n_{11}$ . Поэтому искомый максимум равен  $\frac{10 \cdot 11}{2} \left(\frac{2024}{11}\right)^2 = 1862080$ .

Обоснуем, что максимум  $\sum_{k < l} n_k \cdot n_l$  достигается при равенстве величин  $n_i$ . Переложим единицу с  $n_1$  на  $n_2$  и сравним суммы попарных произведений до и после:

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m \rightarrow n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m.$$

$$n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_m \rightarrow (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m) - n_2 - n_3 - \dots - n_m + n_1 + n_3 + \dots + n_m - 1$$

То есть изменение суммы равно  $n_1 - n_2 - 1$ . Если  $n_1 = n_2 + k$ , (то есть  $n_1$  было больше), то мы добиваемся прироста суммы произведений размера  $k - 1$ . Если, наоборот,  $n_2$  было больше  $n_1$ , то получается гарантированная убыль. Значит, если сумма  $n_i$  фиксированная, переложить баллы с большего  $n_i$  на меньшее  $n_j$  выгодно (если  $|n_i - n_j| = 1$ , то такие перекладывания ничего не добавляют). Получается, что самая выгодная конфигурация — когда нету больших и меньших значений, когда множители равны друг другу и общая сумма поделена поровну (а если поровну баллы не делятся, то  $n_i$  равны друг другу с точностью до единицы, но в нашем случае 2024 делится на 11 без остатка).

**В-2** 8 друзей катаются на катке в форме правильного 16-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 1792248

**Решение.** Ясно, что в одной точке не могут пересечься траектории более двух друзей – иначе число пересечений можно увеличить, немного подвинув траектории. При этом точек пересечения разных траекторий конечное число, потому что никто не ехал по диагонали (т.к.

нет отпечатков в углах). Для вычисления можно считать, что траектория движения каждого из друзей состоит из параллельных линий (они будут перпендикулярны соответствующей данному другу паре бортиков). Число линий равно 2024. И если каждый  $j$ -й друг прочертил  $n_j$  линий, то  $n_1 + n_2 + \dots + n_8 = 2024$ . Теперь нам нужно максимизировать число пересечений, т.е. сумму всевозможных величин  $n_k \cdot n_l$  при различных  $k, l$ .

Обоснуем, что максимум  $\sum_{k < l} n_k \cdot n_l$  достигается при равенстве величин  $n_i$ . Переложим единицу с  $n_1$  на  $n_2$  и сравним суммы попарных произведений до и после:

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m \rightarrow n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m.$$

$$n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_m \rightarrow (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m) - n_2 - n_3 - \dots - n_m + n_1 + n_3 + \dots + n_m - 1$$

То есть изменение суммы равно  $n_1 - n_2 - 1$ . Если  $n_1 = n_2 + k$ , (то есть  $n_1$  было больше), то мы добиваемся прироста суммы произведений размера  $k - 1$ . Если, наоборот,  $n_2$  было больше  $n_1$ , то получается гарантированная убыль. Значит, если сумма  $n_i$  фиксированная, переложить баллы с большего  $n_i$  на меньшее  $n_j$  выгодно (если  $|n_i - n_j| = 1$ , то такие перекалывания ничего не добавляют). Получается, что самая выгодная конфигурация — когда нету больших и меньших значений, когда множители равны друг другу и общая сумма поделена поровну (а если поровну баллы не делятся, то  $n_i$  равны друг другу с точностью до единицы).

$2024 : 8 = 253$ , а это число нечётное. Поэтому поровну поделить пробежки не получится — четверо сделают по 127 пробежек туда-сюда (1 группа), а четверо — по 126 (2 группа). Найдём их количество пересечений. Для этого удобно считать по отдельности пересечения первой группы с первой, второй группы со второй, первой группы со второй — и сложить их вместе. Получится

$$252^2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 254^2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 252 \cdot 254 \cdot 4^2 = 1792248.$$

**В-3** 23 друга катаются на катке в форме правильного 46-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 1959232

**В-4** 88 друзей катаются на катке в форме правильного 176-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 2024968