Олимпиада «Ломоносов» 2024/25

Инженерные науки

Оглавление

6-8 классы 2
Задача 1. Пятеро друзей. 2
Задача 2. Нормы КБЖУ. 2
Задача 3. Керосин. 4
Задача 4. Юный химик. 4
9-10 классы 6
Задача 1. Сплав. 6
Задача 2. Вулканчик. 7
Задача 3. Пластинка внутри аквариума. 7
Задача 4. Сплав двух металлов. 9
11 класс 12
Блок: химия 12
Задача 1. Синий краситель. 12
Блок: физика. 13
Задача 2. Сосуды с гелием. 13
Блок: химия 14
Задача 3. Хлорфенол и бромоформ. 14
Блок: физика. 15
Задача 4. Падающая цепь. 15

6-8 классы

Задача 1. Пятеро друзей.
Пятеро друзей: Аня, Боря, Вова, Дима и Лена загадали по числу от 1 до 10, не повторяя выбор друг друга. Известно, что:

- Число Ани на 2 больше числа Лены;
- Боря загадал число 7;
- Число Димы равно сумме чисел Вовы и Лены;
- Число Вовы меньше числа Ани, но больше числа Лены.

Найдите все решения задачи.

Решения:

Ребята	Решение 1	Решение 2
Аня	4	6
Боря	7	7
Дима	5	9
Вова	3	5
Лена	2	4

Критерии:
1. Дан один правильный набор чисел – 15 баллов.
2. Дано два правильных набора чисел – 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 2. Нормы КБЖУ.
Для детского лагеря необходимо составить меню на день, чтобы оно соответствовало нормам потребления КБЖУ для 6-классников (11-13 лет). Известно, что на день в среднем ребенку такого возраста необходимо:

Пол и возраст	Белки, г	Жиры, г	Углеводы, г	Энергия, ккал
11 - 13 лет	82	84	355	2500

При составлении меню допускается отклонение от средней нормы не более чем на 10%. Питание 5-разовое (завтрак, 2 завтрак, обед, полдник, ужин)

В столовой детского лагеря могут приготовить следующие блюда:

Пол и возраст	Порция, г	Белки (на 100 г), г	Жиры (на 100 г), г	Углеводы (на 100 г), г	Энергия (на 100 г), ккал

Овсянка на молоке	250	11.1	3.5	23.7	170.7
Творожная запеканка	250	2.3	3.7	11	86.5
Омлет	200	11.4	20.7	2.1	240.3
Оладушки	105	7.4	9.5	39.4	272.7
Йогурт фруктовый	125	6.4	3.4	4.8	75.4
Творог с вареньем	200	12.4	5	16.8	161.8
Печенье песочное	30	4.3	37.6	56.4	581.2
Бутерброд с сыром	65	12.8	16.2	29.6	321.3
Бутерброд с вареной колбасой	65	8.6	26.1	19.3	348.8
Борщ	250	2.5	0.7	4.1	32.7
Рассольник	250	2.6	1.9	3.7	42.3
Сырный суп	250	1.7	7.4	9.8	112.6
Салат витаминный	180	0.9	4.8	8.3	80
Винегрет	180	1.3	3.5	9.6	75.1
Котлета куриная	120	20	9.9	8.7	203.9
Гуляш	100	24,9	22	7,7	326
Минтай жареный	150	14.7	8.7	3.6	151.5
Пюре картофельное	150	2.1	8.3	15.2	143.9
Гречка отварная	100	3.7	3.6	23.8	142.4
Рис отварной	100	2.1	1.2	23.7	114
Чай	200	0.4	0.1	0.1	2.8
Компот	200	0.2	0.2	6.1	27
Кефир	200	3	3.2	4	57
Молоко	200	3	3.2	4.7	60
Зефир	40	0.8	0.1	79.8	326

Составьте полноценное меню на один день.

Решение:

Любой разумный вариант, удовлетворяющий условиям.
Например:
Завтрак – овсянка на молоке, бутерброд с вареной колбасой, чай с сахаром
Второй завтрак – оладушки, йогурт, чай с сахаром, молоко
Обед – борщ, котлета куриная, гречка, зефир, компот
Полдник – печенье, кефир
Ужин – жареный минтай, рис, винегрет, зефир, компот
Итого: белков – 90, жиров – 81, углеводов – 357, 2436 ккал

Критерии:

1. Приведен правильный вариант, удовлетворяющий условиям– 15 баллов.
2. Правильно выполнены расчеты КБЖУ – 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 3. Керосин.

Рассчитайте, какое количество керосина необходимо залить в бак самолета, выполняющего рейс по маршруту Москва-Санкт-Петербург (635 км), расход топлива составляет 2700 литров/час. Средняя скорость полета 780 км/ч. Необходимо, чтобы топлива хватило для полета, для ухода на запасной аэродром (Череповец, 438 км от Санкт-Петербурга) и еще плюс 10%.

Решение:

Время полета составляет (635 + 438 км)/780 км/ч = 1.37 ч

Расход топлива 1.37 ч*2700 = 3714

10% - 371

Необходимо залить 3714+371=4085 л

Ответ: 4085л.

Критерии:

1. Правильно записан ход мыслей, однако допущены ошибки– 10 баллов.
2. Правильно выполнены расчеты и приведен ответ – 15 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 4. Юный химик.

Юный химик Коля Меншуткин нашел на дедушкиной антресоли вырванный фрагмент первого издания учебника Д.И. Менделеева «Основы химии». Первая страница фрагмента имела номер 435, а последняя записывалась теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько листов в этом фрагменте учебника?

Возможное решение:

Так как у листа 2 страницы и первая страница нечетная, то последняя страница должна быть четной. Значит, последняя цифра – 4. Номер последней страницы больше, чем первой. Остается единственная возможность: 534. Значит, всего страниц 100, а листов 50.

Критерии оценивания:

1. Есть корректное решение и правильный ответ – 25 баллов
2. Все верно, но указано число страниц, а не листов – 20 баллов
3. Верно указан только номер последней страницы – 10 баллов

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

9-10 классы

Задача 1. Сплав.

Юный Емельян решил применить полученные на уроках химии знания для создания поделки на конкурс путем электрохимического травления рисунка. Рассчитайте значение тока для анодной обработки медно-никелевого сплава (ρ = 8.5 г/см^3) для получения за 30 минут линии длиной 15 см, шириной 3 мм и глубиной 2 мм. Выход реакции составляет 60%. Известно, что данный сплав лишь частично растворяется в растворе разбавленной серной кислоты с выделением газа объем 17.11 л при массе образца сплава 91.9 г (давление – 1 атм, температура комнаты – 25°С). Ответ укажите с точностью до десятых.

Справочные данные для решения:

Принять универсальную газовую постоянную равной 8.31 $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\times\text{К}}$, 1 атм = 101300 Па, постоянная Фарадея F = 96500 $\frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$.

В ходе решения все получаемые значения следует округлять до десятых.

Решение:

1) Нужно определить состав и среднюю молярную массу сплава. С разбавленной серной кислотой реагирует только Ni:

$Ni+H_2SO_4 = NiSO_4 + H_2$

Рассчитаем количество выделившегося водорода по уравнению Менделеева-Клапейрона:

$$P \times V = n \times R \times T \ \rightarrow n(H_2) = \frac{P \times V}{R \times T} = \frac{101300\ \text{Па} \times 0.01711\ \text{м}^3}{8.31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \times \text{К}} \times 298\ \text{К}}$$

$$= 0.6999\ \text{моль} = 0.7\ \text{моль}$$

Отсюда n (Ni) = n (H_2) = 0.7 моль; m (Ni) = 41.1 г.

m (Cu) = 91.9 г – 41.1 г = 50.8 г; n (Cu) = 0.8 моль;

$M_{ср}$ (сплава) = $\frac{m\ (\text{сплава})}{n(Cu)+n(Ni)} = \frac{91.9\ \text{г}}{1.5\ \text{моль}} = 61.3\ \text{г/моль}$

2) Рассчитаем массу сплава, подвергшуюся анодированию:

m (сплава) = V*ρ=15*0.3*0.2*8.5= 7.7 г

3) Определим значения тока по закону Фарадея:

$$I = \frac{n * F * m(\text{сплава})}{t * \eta * M\text{ср}} = \frac{2 * 96500 * 7.7}{1800 * 0.6 * 61.3} = 22.4\ \text{А}$$

где n – число электронов, η – выход реакции.

Ответ: 22.4±0.1 А.

Критерии:

1. Рассчитана масса сплава, подвергшаяся анодированию– 5 баллов.
2. Рассчитано количество моль водорода по уравнению Менделеева-Клапейрона – 10 баллов;
3. Определено значение тока по закону Фарадея– 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 2. Вулканчик.

Учитель химии Илья Юрьевич хотел показать школьникам опыт «вулканчик», однако в школьной лаборатории не оказалось бихромата аммония, а из реактивов нашелся лишь хромат калия, серная кислота и металлический литий. Удастся ли Илье Юрьевичу запланированный опыт? Напишите соответствующие реакции.

Решение:

$Li+N_2 = Li_3N$ (азот из воздуха)

$Li_3N + H_2O = LiOH + NH_3$

$NaCrO_4 + H_2SO_4 = CrO_3 + Na_2SO_4 + H_2O$

$CrO_3 + NH_3 * H_2O = (NH_{4+})_2Cr_2O_7$

Ответ: да

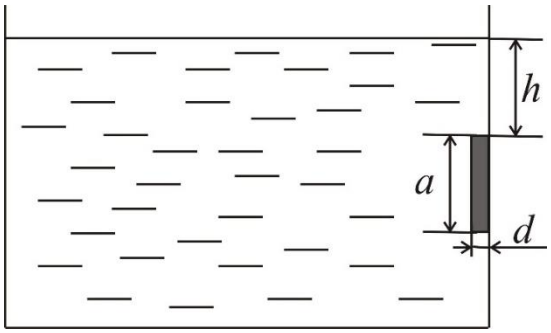
Критерии:

1. Верный ход мыслей– 10 баллов.
2. Приведены соответствующие реакции– 15 баллов;

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 3. Пластинка внутри аквариума.

В большой аквариум налита вода. Внутри аквариума к его вертикальной стенке плотно прижата тонкая квадратная стеклянная пластинка таким образом, что вода между ней и стенкой аквариума не проникает (см. рисунок). Верхний край пластинки расположен горизонтально на глубине $h = 10$ см от поверхности воды. Размеры пластинки a x a x d = 5 см x 5 см x 0,6 см. Найдите модуль силы, с которой вода действует на пластинку, если она находится в равновесии. Плотность воды $\rho_в$=1000 кг/м^3, модуль ускорения свободного падения g = 10 м/с^2.



Решение.

Вода действует на стороны пластинки, соприкасающиеся с водой. Во-первых, это горизонтальная сила $\vec{F}_x$, действующая на боковую квадратную поверхность, площадь которой равна $S = a^2$. Во-вторых, это пара вертикально направленных сил, действующих на верхнюю и нижнюю грани, имеющие площади $s = a \cdot d$. Силы, действующие на узкие боковые грани, компенсируют друг друга.

Чтобы найти горизонтальную силу F_x, учтём, что гидростатическое давление воды увеличивается с глубиной по закону прямой пропорциональности: $p = \rho_в g y$, где y – глубина. На уровне верхней грани пластинки давление будет равно $p_1 = \rho_в g h$, а давление на уровне нижней грани пластинки равно соответственно $p_2 = \rho_в g(h + a)$. Так как сила, действующая на площадку S вычисляется по формуле $F = p \cdot S$, то для того, чтобы вычислить силу, действующую на всю поверхность площадью $S = a^2$, нам необходимо усреднить гидростатическое давление:

$$p_{ср} = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{\rho_в g h + \rho_в g(h+a)}{2} = \rho_в g \frac{2h+a}{2}.$$

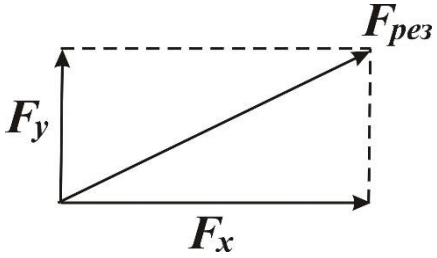
Отсюда горизонтальная сила F_x равна:

$$F_x = \rho_в g \left(\frac{2h+a}{2} \right) \cdot a^2.$$

Найдём теперь результирующую двух вертикальных сил:

$$F_y = \left(\rho_в g(h+a) - \rho_в g h\right) \cdot ad = \rho_в g a^2 d.$$

Окончательно, результирующую силу, действующую на стеклянную пластинку со стороны воды, найдём, применив теорему Пифагора (см. рис.):



$$F_{\text{рез}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\rho_{\text{в}} g a^2\right)^2 \left(\frac{2h+a}{2}\right)^2 + \left(\rho_{\text{в}} g a^2\right)^2 d^2}\ .$$

$$F_{\text{рез}} = \rho_{\text{в}} g a^2 \sqrt{\left(\frac{2h+a}{2}\right)^2 + d^2}\ .$$

Подставляя численные данные, получаем численный ответ:

$$F_{\text{рез}} = 1000 \cdot 10 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-2}}{2}\right)^2 + (0{,}6 \cdot 10^{-2})^2} =$$

$$= 25 \cdot 10^{-2} \sqrt{\left(\frac{20+5}{2}\right)^2 + 0{,}36} = 25 \cdot 10^{-2} \sqrt{22{,}86} \approx 3{,}13\ \text{Н}$$

Ответ: $F_{\text{рез}} \approx 3{,}13$ Н.

Критерии:

1. Указаны грани пластинки, на которые действует вода, – 3 балла;
2. Получена общая формула для горизонтальной силы F_x – 8 баллов;
3. Получена общая формула для вертикальной силы F_y – 10 баллов;
4. Найдена результирующая сила с применением теоремы Пифагора – 4 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Задача 4. Сплав двух металлов.

Ученик взял сплав двух металлов (металла Me1 и металла Me2), причем количество второго металла составляло менее 0,1% от первого. Ученик разделил этот сплав на две части и провёл с ними два эксперимента.

В первом эксперименте ученик поместил первую часть сплава в фарфоровую чашку и оставил на воздухе на сутки. Когда через сутки он пришел посмотреть на сплав, то обнаружил, что сплав исчез, а вместо него в чашке появился белый порошок.

Во втором эксперименте ученик поместил сплав массой 1,56 г в воду, в результате он наблюдал химическую реакцию с выделением почти 2 л водорода, при этом на дно чашки выпал белый осадок.

Какие металлы могли входить в сплав? Какие происходят химические реакции? Запишите их уравнения и объясните полученный результат.

Решение.

Полученные эффекты в обоих экспериментах наводят на мысль, что один из металлов – алюминий, который после взаимодействия со вторым металлом потерял свою оксидную плёнку, защищающую его от взаимодействия с водой

или кислородом воздуха. Именно поэтому данный металл во втором эксперименте вступил в реакцию с водой с образованием белого осадка гидроксида алюминия.

Запишем химическую реакцию взаимодействия алюминия с водой:

$$2\ Al + 6\ H_2O \rightarrow 2\ Al(OH)_3 + 3\ H_2\uparrow \qquad (1)$$

Подставляя в данное уравнение массу первого металла Me1 (1,56 г), получаем, что количество вещества алюминия:

$\nu(Al) = m(Me1)/M(Al) = 1{,}56$ г/(26 г/моль) = 0,06 моль.

Значит, водорода в реакции должно выделиться $\nu(H_2) = 0{,}09$ моль. Это соответствует объёму выделившегося водорода:

$V(H_2) = \nu(H_2) \cdot 22{,}4$ л = 2,016 л,

что почти равно собранному количеству водорода в реакции – 2 л! Значит, первый металл сплава – это алюминий.

Разрушить защитную оксидную плёнку на алюминии могут несколько металлов. Например, это может быть ртуть, которая образует на поверхности алюминия сплав алюминия и ртути – амальгаму. Ртуть не позволяет образоваться прочной оксидной плёнке на алюминии, и на открытом воздухе алюминий постепенно превращается в белый порошок оксида алюминия (первый эксперимент):

$$4Al + 3O_2 \rightarrow 2Al_2O_3 \qquad (2)$$

Если же такой алюминий без оксидной плёнки поместить в воду произойдёт бурная химическая реакция алюминия с водой образованием водорода (второй эксперимент, уравнение (1)).

Другим металлом, который произведёт похожее действие на алюминий, может быть галлий. Галлий, аналогично ртути, также создаёт на поверхности алюминия амальгаму. Если поместить сплав алюминия с галлием в воду, то реакция алюминия с водой (второй эксперимент) также происходит с бурным выделением водорода. Однако в случае сплава с галлием повторить первый эксперимент не получится: после оставления на сутки сплава алюминия с галлием вместо белого порошка ученик обнаружил бы снова тот же сплав, однако он стал бы более хрупким: стал бы легко ломаться на маленькие кусочки. Поэтому можно сделать вывод, что вторым металлом будет именно ртуть.

Ответ: Me1 – это алюминий, Me2 – это ртуть

Критерии:

1. Получен ответ без обоснования, что первый металл – это алюминий – 3 балла;

2. Записана химическая реакция взаимодействия алюминия с водой (уравнение (1)) – 4 баллов;
3. Записано уравнение (2) взаимодействия алюминия с кислородом – 3 балла;
4. Показано, что для данной массы первого металла (1,56 г) должно выделиться именно 2 л водорода. Таким образом, дано обоснование, что первый металл – именно алюминий – 4 баллов;
5. Получен ответ без обоснования, что второй металл – это ртуть – 3 балла;
6. Получен ответ без обоснования, что второй металл – это галлий – 3 балла;
7. Дано обоснование того факта, почему второй металл – это именно ртуть (сказано про образование амальгамы, также сказано, что на воздухе сплав алюминия и ртути дает именно белый порошок (первый эксперимент)) – 5 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

11 класс

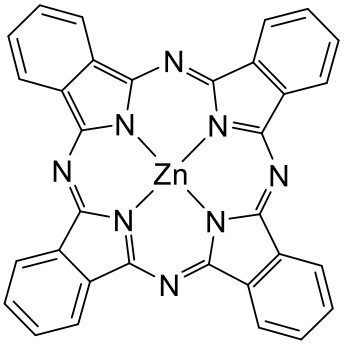
Блок: химия.

Задача 1. Синий краситель.

Один макроциклический синий краситель, использующийся в качестве стандарта во флуориметрии, получают из динитрила ортофталевой кислоты и солей цинка. Известно, что формула красителя – $C_{32}H_{16}N_8Zn$, его структурная формула представляет симметричный полностью сопряженный макроцикл, включающий в себя 4 шестичленных цикла и 4 пятичленных цикла, а атом цинка связан координационной связью с четырьмя атомами азота. Предложите структурную формулу красителя, а также рассчитайте сколько необходимо взять орто-фталевой кислоты и ацетата цинка (II) для получения 4 г красителя, если выход данной реакции составляет 73%.

Возможное решение:

Структура:



Также принимаются любые возможные варианты, соответствующие описанию.

Расчет: $4C_8H_4N_2 + Zn(CH_3COO)_2 = C_{32}H_{16}N_8Zn$

$\upsilon(C_{32}H_{16}N_8Zn)=4/577=6.93*10^{-3}$ моль

$\upsilon(C_8H_4N_2)= 6.93*10^{-3}*4/0.73=38.0*10^{-3}$

$m(C_8H_4N_2)= 38.0*10^{-3}*128=4.86$ г

$\upsilon(Zn(CH_3COO)_2)= 6.93*10^{-3}/0.73=9.5*10^{-3}$

$m(Zn(CH_3COO)_2)= 9.5*10^{-3}*183=1.74$ г

Критерии:

1. Правильно составлена структурная формула вещества (или приведен другой вариант, полностью соответствующий описанию) – 15 баллов.
2. Правильно выполнены расчеты и приведен ответ – 10 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Блок: физика.

Задача 2. Сосуды с гелием.

Два одинаковых герметично закрытых сосуда с жесткими стенками соединены тонкой трубкой и заполнены газообразным гелием. Эти сосуды поместили в два разных независимых термостата. Первый термостат охладил содержимое сосуда до температуры 10 °C, а второй – нагрел до температуры 90 °C. После установления в системе теплового равновесия оказалось, что в одном из сосудов на 0,7 моль гелия больше, чем в другом. Сколько молей газа оказалось в каждом сосуде? Ответы округлите до десятых долей.

Условия для решения:

При решении задачи объемом соединительной трубки можно пренебречь как ничтожно малым. В ходе решения все результаты округлять до десятых. Ответ дать с точностью до десятых.

Возможное решение:

Поскольку соединительная трубка тонкая, ее объемом можно пренебречь по сравнению с объемом V каждого из сосудов. Предположим, что $\nu_1 > \nu_2$. Тогда по условию задачи $\nu_1 - \nu_2 = 0{,}7$ моль, откуда $\nu_1 = \nu_2 + 0{,}7$.

В состоянии равновесия давления в обоих сосудах одинаковые: $p_1 = p_2$. Из уравнения Менделеева – Клапейрона получаем:

$$p_1 = \frac{\nu_1 R T_1}{V} = \frac{\nu_2 R T_2}{V} = p_2,$$

$$\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2,$$

$$(\nu_2 + 0{,}7) \times 283 = \nu_2 \times 363,$$

$$\nu_2 \approx 2{,}5 \text{ моль},$$

$$\nu_1 \approx 3{,}2 \text{ моль}.$$

Критерии:

1. Указано, что $p_1 = p_2$ – +5 баллов;
2. Использовано уравнение Менделеева – Клапейрона и корректно описано состояние системы с помощью него – +5 баллов.
3. Даны правильные ответы с точностью до ±0,1 моль – +15 баллов.
4. Приведено правильное решение, но ответы отличаются от истинных на > ±0,1 моль – минус 3 балла.
5. Температура при решении не переведена из градусов Цельсия в Кельвины – минус 3 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Блок: химия.

Задача 3. Хлорфенол и бромоформ.
Образец хлорфенола (ClC_6H_4OH) массой 1.500 г растворили поместили в колбу и растворили в 250 г бромоформа $CHBr_3$. Температура плавления получившегося раствора по сравнению с температурой плавления чистого растворителя понизилась на 0.84 К. А) Найдите мольные доли мономера и димера хлорфенола в растворе. Б) Почему фенолы димеризуются в растворе бромоформа и В) практически не образуют димеры в водных растворах?

Условия для решения:

Понижение температуры раствора по сравнению с температурой плавления

чистого растворителя можно найти по формуле:

$\Delta T=K_k \times m$,

где K_k – криоскопическая константа растворителя, m – моляльность раствора (число моль растворенного вещества на 1 кг растворителя).

Криоскопическая константа бромоформа равна 22.5 К×кг/моль.

Молекулярная масса хлорфенола равна 128.56 г/моль.

В ходе решения все получаемые ответы следует округлять до тысячных, ответ округлять до сотых.

Возможное решение:

Из формулы $\Delta T=K_k \times m$ выразим m:

$$m = \frac{\Delta T}{K_k} = \frac{0.84\ K}{22.5\ \frac{K \times \text{моль}}{\text{к}}} = 0.037\ \text{моль/кг}$$

Зная, что масса растворителя 0.25 кг, рассчитаем среднюю молярную массу хлорфенолов:

$$M_{ср} = \frac{1.5\ \text{г}}{0.058\ \frac{\text{моль}}{\text{кг}} \times 0.25\ \text{кг}} = 162{,}162\ \text{г/моль}$$

Среднюю молярную массу в растворе можно выразить через молярные массы мономера и димера и их мольные доли:

$$M_{ср} = M_1 \times x_1 + M_2 \times x_2$$

$$162{,}162 = 128{,}56 \times x_1 + 257.12 \times x_2$$

Помним, что $x_1+x_2=1$, то получим:

$x_1 = 0.74$ – молярная доля мономера,

$x_2 = 0.26$ – молярная доля димера.

Ответы на теоретические вопросы:

Б) Фенолы в растворе димеризуются из-за образования водородных связей между молекулами.

В) В водном растворе молекулы фенолов будут образовывать водородные связи с молекулами воды. Поскольку молекул воды в растворе гораздо больше, чем молекул фенолов, степень димеризации фенолов уменьшится.

Критерии:

1. Правильно посчитаны мольные доли с точностью ±0,02 – 15 баллов, если с погрешность больше, но ход решения верный - то 8 баллов.
2. Правильно дан ответ на вопрос Б – плюс 5 баллов.
3. Правильно дан ответ на вопрос В - плюс 5 баллов.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**

Блок: физика.

Задача 4. Падающая цепь.

Школьник приехал в гости в деревню и обнаружил во дворе старый колодец. На ворот была намотана прикрепленная к нему цепь, а ведро отсутствовало. Школьник решил поэкспериментировать. Придерживая свободный конец цепи рукой, он начал вращать ворот, полностью смотав с него цепь. При этом цепь оказалась сложенной пополам, середина цепи опустилась в колодец на глубину $H = 8$ м и обе ее половины покоились в вертикальном положении. Затем юный экспериментатор отпустил удерживавшийся им конец цепи без начальной скорости. Найдите, чему была равна сила натяжения цепи в точке ее прикрепления к вороту через $\tau = 1$ с после начала движения падающего участка цепи. Покоящаяся и движущаяся части цепи не касались друг друга, глубина колодца превышает $2H$, сопротивление воздуха отсутствует. Один метр цепи имеет массу $\mu = 0{,}2$ кг/м, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

Решение

Пусть за время t, отсчитываемое от момента отпускания удерживавшегося конца цепи, длина свисающего с ворота покоящегося участка цепи увеличилась на l. Сила F натяжения цепи в точке ее прикрепления к вороту складывается из трех слагаемых: постоянного веса половины цепи ($F_1 = \mu g H$), переменного веса покоящегося участка цепи длиной l ($F_2 = \mu g l$) и силы F_3, которая необходима для того, чтобы в момент времени t остановить очередной падающий малый элемент цепи. Поэтому

$F = F_1 + F_2 + F_3 = \mu g H + \mu g l + F_3$.

Заметим, что $2l = gt^2/2$, поскольку элемент цепи, оказавшийся на расстоянии l ниже середины цепи, за время t проходит расстояние $2l$.

Рассмотрим малый элемент цепи массой Δm, который за малое время Δt «присоединяется» к неподвижному участку цепи. За это время импульс данного элемента изменяется на $\Delta p = \Delta m V$, где $V = gt$ – скорость элемента Δm в момент перед «присоединением» к неподвижному участку цепи. Изменение импульса происходит потому, что со стороны неподвижного участка цепи на падающий малый элемент действует сила, величина которой равна F_3. В соответствии с третьим законом Ньютона такая же по модулю сила действует со стороны останавливающегося элемента на неподвижный участок цепи. Поскольку $\Delta m = \mu \Delta l = \mu g t \Delta t/2 = \mu V \Delta t/2$,

$F_3 = \Delta p/\Delta t = \Delta m V/\Delta t = \mu V^2/2 = \mu g^2 t^2/2$.

Потому искомая сила равна

$F = \mu g H + \mu g^2 t^2/4 + \mu g^2 t^2/2 = \mu g(H + 3gt^2/4)$.

Подставляя численные значения, получим:

$F = 0{,}2 \cdot 10 \cdot (8 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2/4) = 31$ Н.

Ответ: $F = \mu g(H + 3gt^2/4) = 31$ Н.

Критерии:

1. Записано выражение для силы F как суммы трёх сил – 3 балла;
2. Учтено, что элемент цепи, оказавшийся на расстоянии l ниже середины цепи, за время t проходит расстояние $2l$ – 5 баллов;
3. Получена формула для силы F_3 – 9 баллов;
4. Получен ответ в общем виде – 5 баллов;
5. Получен правильный численный ответ – 3 балла.

Максимум баллов за эту задачу: **25** баллов**.**