

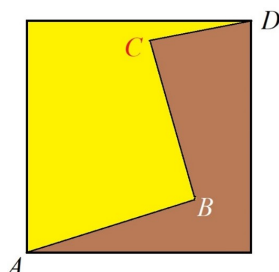
Олимпиада школьников Ломоносов–2024
по механике и математическому моделированию

Вариант 241

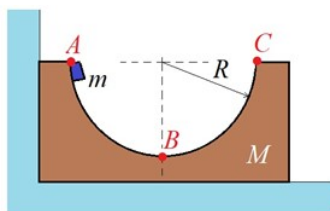
1. Гаврила, сбегая вниз по движущемуся вверх эскалатору, насчитал 60 ступенек. Глафира, шагая вверх по этому же эскалатору, насчитала 30 ступенек. Собственная скорость Гаврилы в три раза больше собственной скорости Глафиры. Сколько ступенек видно на эскалаторе в данный момент времени, если его скорость движения постоянна?

2. В озере плавает жмых в форме кубика массой 160 г. Ту часть кубика, которая находится под водой, начинает есть рыбка со скоростью 15 г в минуту. Одновременно с ней надводную часть начинает есть птичка со скоростью 5 г в минуту. Сколько грамм съест птичка? Плотность жмыха $0,6 \text{ г/см}^3$, плотность воды 1 г/см^3 .

3. Фермер приобрел квадратное поле, через которое проходит узкая тропинка. Осматривая поле, он прошел по участку AB за 15 минут, затем свернул под прямым углом налево и прошел по участку BC за 8 минут. После этого он свернул под прямым углом направо и прошел по участку CD за 6 минут. Всё это время он шел с постоянной скоростью 3 км/час. Он решил, что на верхней части поля (окрашена светлым) он посадит дыни, которые в этих краях дают урожайность 300 ц/га, и которые можно продать по цене 4 тыс. руб./ц. На нижней части поля (окрашена темным) он посадит арбузы, урожайность которых 400 ц/га, цена продажи — 3 тыс. руб./ц. Определите суммарную выручку фермера.



4. Симметричный брусок массы $M = 1 \text{ кг}$ с углублением в виде горизонтально расположенной половины цилиндра радиуса $R = 20 \text{ см}$ (см. рисунок) стоит на гладкой горизонтальной поверхности около вертикальной стенки. Из точки A без трения начинает соскальзывать маленькая шайба массы $m = 250 \text{ г}$.



А) Какую скорость будет иметь брусок, когда шайба окажется в точке B в 2023-й раз?

Б) Какую скорость будет иметь брусок, когда шайба окажется в точке B в 2024-й раз?

5. В вертикальном закрытом цилиндре расположен поршень, который может двигаться в цилиндре без трения. В цилиндр по обе стороны от поршня ввели одинаковое количество одного и того же газа. Газ и цилиндр находятся в равновесном состоянии при температуре $T = 273 \text{ К}$. При этом объем верхней части цилиндра над поршнем в 2 раза больше, чем нижней части под поршнем. До какой температуры нагрели цилиндр с газом, если отношение объемов верхней и нижней частей стало равным $\frac{3}{2}$.

6. Космический аппарат обнаружил систему из двух звезд Alpha и Beta, расстояние между которыми $2L$ не меняется со временем и поблизости от которых нет других массивных объектов. Были измерены действующие на аппарат со стороны звезд суммарные силы в двух разных точках прямой, проходящей через эти звезды:

— когда аппарат находился на равном расстоянии от этих двух звезд;

— когда аппарат находился на расстоянии L от звезды Alpha.

Отношение первой суммарной силы ко второй оказалось равно n .

А) Найдите отношение массы звезды Alpha к массе звезды Beta, если $n = 1/2$.

Б) Определите возможные значения отношения масс этих двух звезд для каждого неотрицательного значения n .

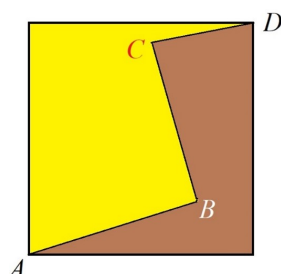
Олимпиада школьников Ломоносов–2024
по механике и математическому моделированию

Вариант 242

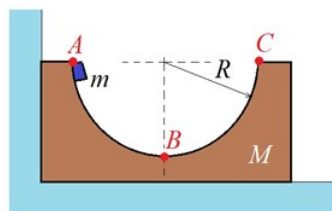
1. Гаврила, сбегая вниз по движущемуся вверх эскалатору, насчитал 50 ступенек. Глафира, шагая вверх по этому же эскалатору, насчитала 25 ступенек. Собственная скорость Гаврилы в три раза больше собственной скорости Глафиры. Сколько ступенек видно на эскалаторе в данный момент времени, если его скорость движения постоянна?

2. В озере плавает жмых в форме кубика массой 160 г. Ту часть кубика, которая находится под водой, начинает есть рыбка со скоростью 15 г в минуту. Одновременно с ней надводную часть начинает есть птичка со скоростью 5 г в минуту. Сколько грамм съест птичка? Плотность жмыха $0,6 \text{ г/см}^3$, плотность воды 1 г/см^3 .

3. Фермер приобрел квадратное поле, через которое проходит узкая тропинка. Осматривая поле, он прошел по участку AB за 12 минут, затем свернул под прямым углом налево и прошел по участку BC за 9 минут. После этого он свернул под прямым углом направо и прошел по участку CD за 6 минут. Всё это время он шел с постоянной скоростью 4 км/час. Он решил, что на верхней части поля (окрашена светлым) он посадит дыни, которые в этих краях дают урожайность 300 ц/га, и которые можно продать по цене 5 тыс. руб./ц. На нижней части поля (окрашена темным) он посадит арбузы, урожайность которых 500 ц/га, цена продажи — 3 тыс. руб./ц. Определите суммарную выручку фермера.



4. Симметричный брусок массы $M = 0,8 \text{ кг}$ с углублением в виде горизонтально расположенной половины цилиндра радиуса $R = 45 \text{ см}$ (см. рисунок) стоит на гладкой горизонтальной поверхности около вертикальной стенки. Из точки A без трения начинает соскальзывать маленькая шайба массы $m = 200 \text{ г}$.



А) Какую скорость будет иметь брусок, когда шайба окажется в точке B в 2023-й раз?

Б) Какую скорость будет иметь брусок, когда шайба окажется в точке B в 2024-й раз?

5. В вертикальном закрытом цилиндре расположен поршень, который может двигаться в цилиндре без трения. В цилиндр по обе стороны от поршня ввели одинаковое количество одного и того же газа. Газ и цилиндр находятся в равновесном состоянии при температуре $T = 273 \text{ К}$. При этом объем верхней части цилиндра над поршнем в 2 раза больше, чем нижней части под поршнем. До какой температуры нагрели цилиндр с газом, если отношение объемов верхней и нижней частей стало равным $\frac{3}{2}$.

6. Космический аппарат обнаружил систему из двух звезд Alpha и Beta, расстояние между которыми $2L$ не меняется со временем и поблизости от которых нет других массивных объектов. Были измерены действующие на аппарат со стороны звезд суммарные силы в двух разных точках прямой, проходящей через эти звезды:

— когда аппарат находился на равном расстоянии от этих двух звезд;

— когда аппарат находился на расстоянии L от звезды Alpha.

Отношение первой суммарной силы ко второй оказалось равно n .

А) Найдите отношение массы звезды Alpha к массе звезды Beta, если $n = 1/3$.

Б) Определите возможные значения отношения масс этих двух звезд для каждого неотрицательного значения n .

Решение.

1.2.1 Гаврила, сбегая вниз по движущемуся вверх эскалатору, насчитал 60 ступенек. Глафира, шагая вверх по этому же эскалатору, насчитала 30 ступенек. Собственная скорость Гаврилы в три раза больше собственной скорости Глафиры. Сколько ступенек видно на эскалаторе в данный момент времени, если его скорость движения постоянна?

Ответ: 48.

Решение. Пусть x — количество ступенек, E и V — скорости эскалатора и Глафиры соответственно. Тогда скорость Гаврилы равна kV . За то время, что Глафира поднялась по эскалатору, она увидела 30 ступенек, а также прошла весь эскалатор. Значит, вклад эскалатора составляет $x - 30$ дополнительных ступенек. Поскольку они двигались с постоянной скоростью в течение всего времени, то отношение пройденных ими расстояний равно отношению их скоростей:

$$30/(x - 30) = V/E$$

Аналогично, за время, которое потребовалось Гавриле, чтобы спуститься по эскалатору, он увидел 60 ступенек, следовательно, эскалатор должен был пройти за это время $60 - x$ ступенек.

Таким образом: $60/(60 - x) = 3V/E$.

$$\text{Отсюда } (3 \cdot 30)/(x - 30) = 60/(60 - x) \Rightarrow 3(60 - x) = 2(x - 30) \Rightarrow x = 48.$$

В общем виде: $a = 60, b = 30, k = 3$.

$$\text{Ответ: } x = (ab(k + 1))/(bk + a)$$

1.2.2

Ответ: 40.

2.4.1 В озере плавают жмых в форме кубика массой 160 г. Ту часть кубика, которая находится под водой, начинает есть рыбка со скоростью 15 г в минуту. Одновременно с ней надводную часть начинает есть птичка со скоростью 5 г в минуту. Сколько грамм съест птичка? Плотность жмыха $0,6 \text{ г/см}^3$, плотность воды 1 г/см^3 .

Ответ: 40 г

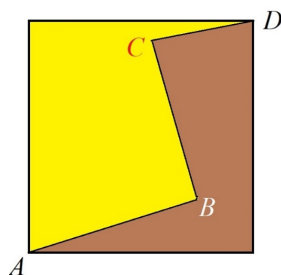
Решение. Пока жмых не съели полностью, часть его будет находиться под водой, а часть над водой (при этом не имеет значения, в какой пропорции). Поэтому рыбка и птичка закончат есть одновременно. За это время рыбка съест $\frac{15}{15+5} \cdot 160 = 120$ г, а птичка $\frac{5}{15+5} \cdot 160 = 40$ г.

Численные значения плотностей здесь роли не играют.

2.4.2

Ответ: 40 г

3.1.1 Фермер приобрел квадратное поле, через которое проходит узкая тропинка. Осматривая поле, он прошел по участку AB за 15 минут, затем свернул под прямым углом налево и прошел по участку BC за 8 минут. После этого он свернул под прямым углом направо и прошел по участку CD за 6 минут. Всё это время он шел с постоянной скоростью 3 км/час. Он решил, что на верхней части поля (окрашена светлым) он посадит дыни, которые в этих краях дают урожайность 300 ц/га, и которые можно продать по цене 4 тыс. руб./ц. На нижней части поля (окрашена темным) он посадит арбузы, урожайность которых 400 ц/га, цена продажи — 3 тыс. руб./ц. Определите суммарную выручку фермера.



Решение. Длины участков AB , BC и CD (они получаются умножением скорости на соответствующее время) равны соответственно

$$3 \cdot 15/60 = 3/4 \text{ км} = 750 \text{ м}, \quad 3 \cdot 8/60 = 4 \text{ км} = 400 \text{ м}, \quad 3 \cdot 6/60 = 300 \text{ м}.$$

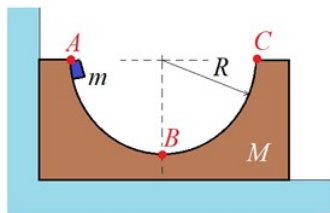
Продолжим параллельные прямые AB и CD и проведем перпендикулярные им линии через точки A и D . В результате получим прямоугольник с диагональю AD . Стороны прямоугольника равны $750 + 300 = 1050$ м и 400 м. Затем по теореме Пифагора находим: $AD^2 = 1050^2 + 400^2 = 1262500$. Поскольку квадрат диагонали равен удвоенной площади квадратного поля, то площадь поля равна 631250 кв. м. = 63,125 га. Дыни приносят по $300 \cdot 4 = 1200$ тыс. руб. с гектара. Так как и $400 \cdot 3 = 1200$, то арбузы с гектара приносят такую же выручку, что и дыни. Поэтому суммарная выручка фермера равна $63,125 \cdot 1200 = 75750$ тыс. руб. = 75,75 млн. руб.

Ответ. 75,75 млн. руб.

3.1.2.

Ответ. 135 млн. руб.

4.2.1 Симметричный брусок массы $M = 1$ кг с углублением в виде горизонтально расположенной половины цилиндра радиуса $R = 20$ см (см. рисунок) стоит на гладкой горизонтальной поверхности около вертикальной стенки. Из точки A без трения начинает соскальзывать маленькая шайба массы $m = 250$ г.



- А) Какую скорость будет иметь брусок, когда шайба окажется в точке B в 2023-й раз?
 Б) Какую скорость будет иметь брусок, когда шайба окажется в точке B в 2024-й раз?

Ответ: А) 0; Б) 0,8 м/с

Введем обозначение: $\alpha = \frac{M}{m} = 4$.

Решение. Когда шайба в первый раз окажется в точке B , она имеет скорость $v_0 = \sqrt{2gR}$, а брусок покоится. Как только шайба перейдет на BC , брусок начнет движение. Пусть ось x вправо. Обозначим u и v проекции скорости шайбы и горки на ось x для тех моментов времени, в которые шайба находится в нижней точке B . Система для определения u и v получается из законов сохранения импульса и энергии.

$$mv_0 = mu + Mv,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$$

Находим два решения:

$$\text{I. } u = v_0, v = 0$$

$$\text{II. } u = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}v_0, \quad v = \frac{2}{1+\alpha}v_0$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 10} = 2 \text{ м/с}; \quad v = \frac{2}{5} \cdot v_0 = 0,8 \text{ м/с}$$

Заметим, что для любого α в случае II выполнено $u < v$, т.е. относительно горки шайба движется влево. Когда шайба находится на дуге BC , сила, с которой она действует на брусок, имеет положительную составляющую в направлении x . Если же шайба на AB , то отрицательную. Т.е. пока шайба на BC , брусок ускоряется, если на AB — тормозится.

Значит, эта система будет двигаться следующим образом. Когда шайба первый раз в точке B , ее скорость v_0 , брусок покоится. Потом шайба начнет подниматься по дуге BC (до точки C , конечно, не дотянется), затем обратно. Все это время брусок ускоряется. Когда шайба снова в точке B , скорость бруска максимальна (решение II). В этот момент скорость шайбы относительно бруска направлена влево.

Затем шайба попадает на AB , и все то время, когда она движется по AB вверх-вниз, брусок теряет скорость. Когда шайба в очередной раз оказывается в B , скорость бруска равна нулю, а скорость шайбы v_0 . Далее все повторяется.

Таким образом, когда шайба n -й раз оказывается в точке B , то для нечетных n имеет место I, для четных — II.

4.2.2

Ответ: А) 0; Б) 1,2 м/с

5.2.1 В вертикальном закрытом цилиндре расположен поршень, который может двигаться в цилиндре без трения. В цилиндр по обе стороны от поршня ввели одинаковое количество одного и того же газа. Газ и цилиндр находятся в равновесном состоянии при температуре $T = 273$ К. При этом объем верхней части цилиндра над поршнем в 2 раза больше, чем нижней части под поршнем. До какой температуры нагрели цилиндр с газом, если отношение объемов верхней и нижней частей стало равным $\frac{3}{2}$.

Ответ. 491, 4

Решение. Условие равновесия поршня при температуре $T_0 = 273$ К: $\frac{mg}{S} + P_1 = P_2$, где m — масса поршня, S — площадь поршня, P_1 — давление газа в верхней части цилиндра, P_2 — давление газа в нижней части цилиндра. Известно, что $V_1 = \alpha V_2$; $\alpha = 2$, где V_1 — объем верхней части цилиндра, V_2 — объем нижней части цилиндра.

Из Закона М-К $P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow P_2 = \alpha P_1$.

Аналогично, при искомой температуре T' (Все соответствующие физические величины при температуре T' будут снабжены знаком $'$) $V'_1 = \beta V'_2$; $\beta = \frac{3}{2}$; $P'_2 = \alpha P'_1$

Кроме того, $P_2 - P_1 = P'_2 - P'_1$ и $V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2 \Rightarrow V_1(1 + \frac{1}{\alpha}) = V'_1(1 + \frac{1}{\beta}) \Rightarrow V'_1 = V_1 \frac{(1 + \alpha)\beta}{1 + \beta} \alpha$; $P'_1 = P_1 \frac{\alpha - 1}{\beta - 1}$

Из закона М-К для верхней порции газа при температурах T и T' имеем:

$$\frac{P_1 V_1}{T} = \frac{P'_1 V'_1}{T'} \Rightarrow T' = T \frac{(\alpha^2 - 1)\beta}{\alpha(\beta^2 - 1)} \Rightarrow T' = 273 \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{5}{4}} = 273 \cdot 1,8 = 491,4 \text{ К}$$

5.2.2

Ответ. 491, 4

6.2.1.

Космический аппарат обнаружил систему из двух звезд Alpha и Beta, расстояние между которыми $2L$ не меняется со временем и поблизости от которых нет других массивных объектов. Были измерены действующие на аппарат со стороны звезд суммарные силы в двух разных точках прямой, проходящей через эти звезды:

- когда аппарат находился на равном расстоянии от этих двух звезд;
- когда аппарат находился на расстоянии L от звезды Alpha.

Отношение первой силы ко второй оказалось равно n .

А) Найдите отношение массы звезды Alpha к массе звезды Beta, если $n = 1/2$.

Б) Определите возможные значения отношения масс этих двух звезд для каждого неотрицательного значения n .

Ответ: А) $17/27$ или $19/9$.

Б) $(9 - n)/(9n + 9)$, если $n \in \{0\} \cup [1; 9)$;

$(9 - n)/(9n + 9)$ или $(9 + n)/(9 - 9n)$, если $n \in (0; 1)$;

ситуация невозможна, если $n \geq 9$.

Решение. В первом случае силы притяжения действуют в разные стороны и датчики фиксируют величину:

$F_1 = G(m|M_A - M_B|)/L^2$, где m — масса аппарата, M_A, M_B — массы звезд.

Во втором случае $F_2 = G \frac{m}{L^2} (M_A + M_B/9)$.

По условию $n = \frac{|M_A - M_B|}{M_A + \frac{M_B}{9}} = \frac{|x - 1|}{x + \frac{1}{9}} = \frac{9|x - 1|}{9x + 1}$, где $x = M_A/M_B > 0$, $n \geq 0$.

Если $0 < x < 1$, то имеем уравнение $9nx + n = 9 - 9x$, и $x = (9 - n)/(9n + 9)$. Это решение имеет смысл, если $0 < n < 9$.

Если $x \geq 1$, то имеем уравнение $9nx + n = 9x - 9$, и $x = (9 + n)/(9 - 9n)$. Это решение имеет смысл, если $0 \leq n < 1$.

Таким образом, если $n \geq 9$, то ситуация невозможна;

если $1 \leq n < 9$, то отношение масс находится однозначно и равно $(9 - n)/(9n + 9)$;

если $0 \leq n < 1$, то имеется два решения $(9 - n)/(9n + 9)$ и $(9 + n)/(9 - 9n)$. Они совпадают, если $n = 0$.

6.2.2. Ответ: А) $17/27$ или $19/9$.

Б) $(9 - n)/(9n + 9)$, если $n \in \{0\} \cup [1; 9)$;

$(9 - n)/(9n + 9)$ или $(9 + n)/(9 - 9n)$, если $n \in (0; 1)$;

ситуация невозможна, если $n \geq 9$.