

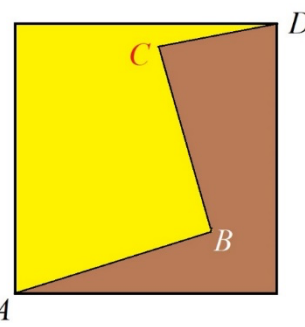
**Олимпиада школьников «Ломоносов»  
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2023/2024 учебного года для 7 – 8 классов

**Вариант 24-78**

1. Гаврила, сбегая вниз по движущемуся вверх эскалатору, насчитал 60 ступенек. Глафира, шагая вверх по этому же эскалатору, насчитала 30 ступенек. Собственная скорость Гаврилы в три раза больше собственной скорости Глафиры. Сколько ступенек видно на эскалаторе в данный момент времени, если его скорость движения постоянна?
2. Стержень, постоянного сечения составлен из двух стержней, различной плотности. Слева стержень более легкий, справа более тяжелый. Плотности материалов относятся как 1:3. Длины левого и правого стержня относятся как 2:1. В каком отношении центр масс составного стержня делит его длину?
3. В озере плавает жмых в форме кубика массой 160 г. Ту часть кубика, которая находится под водой, начинает есть рыбка со скоростью 15 г в минуту. Одновременно с ней надводную часть начинает есть птичка со скоростью 5 г в минуту. Сколько грамм съест птичка? Плотность жмыха  $0,6 \text{ г/см}^3$ , плотность воды  $1 \text{ г/см}^3$ .

4. Фермер приобрел квадратное поле, через которое проходит узкая тропинка. Осматривая поле, он прошел по участку  $AB$  за 15 минут, затем свернул под прямым углом налево и прошел по участку  $BC$  за 8 минут. После этого он свернул под прямым углом направо и прошел по участку  $CD$  за 6 минут. Всё это время он шел с постоянной скоростью 3 км/час. Он решил, что на верхней части поля (окрашена светлым) он посадит дыни, которые в этих краях дают урожайность 300 ц/га, и которые можно продать по цене 4 тыс. руб./ц. На нижней части поля (окрашена темным) он посадит арбузы, урожайность которых 400 ц/га, цена продажи – 3 тыс. руб./ц. Определите суммарную выручку фермера.



5. Космический аппарат обнаружил систему из двух звезд Alpha и Beta, расстояние между которыми  $2L$  не меняется со временем и поблизости от которых нет других массивных объектов. Были измерены действующие на аппарат со стороны звезд суммарные силы в двух разных точках прямой, проходящей через эти звезды:

--- когда аппарат находился на равном расстоянии от этих двух звезд;

--- когда аппарат находился на расстоянии  $L$  от звезды Alpha.

Отношение первой суммарной силы ко второй оказалось равно  $n$ .

Найдите отношение массы звезды Alpha к массе звезды Beta, если  $n=1/2$ .

Для справки. Сила гравитационного притяжения между двумя телами пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Для сферических тел расстояния между ними определяется расстояниями между центрами этих тел.

Решение.

1. Ответ: 7,5.

Пусть собственная скорость катера и скорость течения реки равны соответственно  $x$  км/ч и  $y$  км/ч. Если плот преодолеет расстояние  $S$  км между пристанями  $A$  и  $B$  за  $t$  часов, то

$$ty = (t - 6)(x + y) = (t - 5)(x - y) \Rightarrow \frac{x + y}{y} = \frac{t}{t - 6} \text{ и } \frac{x - y}{y} = \frac{t}{t - 5}.$$

Тогда

$$2 = \frac{x + y}{y} - \frac{x - y}{y} = \frac{t}{t - 6} - \frac{t}{t - 5} \Rightarrow 2(t - 5)(t - 4) = t.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем  $t = 4$  или  $t = \frac{15}{2}$ . По условию задачи  $t > 6$ , поэтому  $t = \frac{15}{2} = 7,5$  (часов).

2. Ответ: 19: 11.

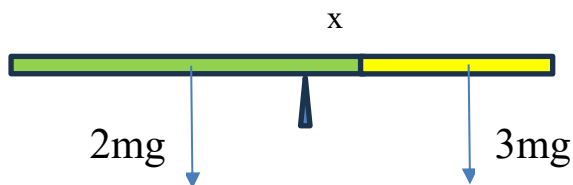
Из условия задачи следует, что длина  $l$  более плотного стержня в 2 раза меньше, чем длина менее плотного стержня, а плотность легкого стержня  $\rho$  в три раза меньше плотности тяжелого. Из этих условий получим соотношение масс стержней  $(2l \cdot \rho) : (l \cdot 3\rho) = 2:3$ . Из условия равновесия будем иметь

$$2mg(l - x) = 3mg\left(\frac{l}{2} + x\right) \Rightarrow 2(l - x) = 3\left(\frac{l}{2} + x\right) \Rightarrow x = \frac{l}{10}$$

Тогда отношение частей составного стержня слева и справа от центра масс будет равно

$$(2l - l/10) : \left(l + \frac{l}{10}\right) = \frac{19}{10} : \frac{11}{10} = 19:11$$

Ответ: 19: 11



3. Ответ: 40 г.

Пока жмых не съели полностью, часть его будет находиться под водой, а часть над водой (при этом не имеет значения, в какой пропорции). Поэтому рыбка и птичка закончат есть одновременно. За это время рыбка съест  $\frac{15}{15+5} \cdot 160 = 120$  г, а птичка  $\frac{5}{15+5} \cdot 160 = 40$  г.

Численные значения плотностей здесь роли не играют.

4. Ответ: 75,75 млн. руб.

Длины участков  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  (они получаются умножением скорости на соответствующее время) равны соответственно  $3 \cdot \frac{15}{60} = \frac{3}{4}$  км = 750 м,  $3 \cdot \frac{8}{60} = 0,4$  км = 400 м,  $3 \cdot \frac{6}{60} = 0,3$  км = 300 м.

Продолжим параллельные прямые  $AB$  и  $CD$  и проведем перпендикулярные им линии через точки  $A$  и  $D$ . В результате получим прямоугольник с диагональю  $AD$ . Стороны прямоугольника равны  $750 + 300 = 1050$  м и 400 м. Затем по теореме Пифагора находим:  $AD^2 = 1050^2 + 400^2 =$

1 262 500. Поскольку квадрат диагонали равен удвоенной площади квадратного поля, то площадь поля равна 631 250 кв. м. = 63,125 га.

Дыни приносят по  $300 \cdot 4 = 1200$  тыс. руб. с гектара. Так как и  $400 \cdot 3 = 1200$ , то арбузы с гектара приносят такую же выручку, что и дыни. Поэтому суммарная выручка фермера равна  $63,125 \cdot 1200 = 75\,750$  тыс. руб. = 75,75 млн. руб.

5. Ответ: А)  $\frac{17}{27}$  или  $\frac{19}{9}$ .

Решение. В первом случае силы притяжения действуют в разные стороны и датчики фиксируют величину:

$$F_1 = G (m |M_A - M_B|) / L^2,$$

где  $m$  — масса аппарата,  $M_A, M_B$  — массы звезд.

Во втором случае

$$F_2 = G \frac{m}{L^2} (M_A + M_B/9).$$

По условию

$$n = \frac{|M_A - M_B|}{M_A + \frac{M_B}{9}} = \frac{(|x-1|)}{(x+\frac{1}{9})} = \frac{(9|x-1|)}{(9x+1)}, \text{ где } x = \frac{M_A}{M_B} > 0, n \geq 0.$$

Если  $0 < x < 1$ , то имеем уравнение  $9nx + n = 9 - 9x$ , и  $x = \frac{9-n}{9n+9}$ . Это решение имеет смысл, если  $0 < n < 9$ .

Если  $x \geq 1$ , то имеем уравнение  $9nx + n = 9x - 9$ , и  $x = \frac{9+n}{9-9n}$ .

Это решение имеет смысл, если  $0 < n < 1$ .

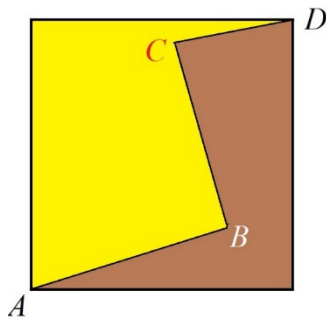
если  $0 \leq n < 1$ , то имеется два решения  $\frac{9-n}{9n+9}$  и  $\frac{9+n}{9-9n}$ . Они совпадают, если  $n = 0$ .

**Олимпиада школьников «Ломоносов»  
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2023/2024 учебного года для 9 – 10 классов

**Вариант 24-910**

1. Гаврила, сбегая вниз по движущемуся вверх эскалатору, насчитал 60 ступенек. Глафира, шагая вверх по этому же эскалатору, насчитала 30 ступенек. Собственная скорость Гаврилы в три раза больше собственной скорости Глафиры. Сколько ступенек видно на эскалаторе в данный момент времени, если его скорость движения постоянна?
2. Стержень, постоянного сечения составлен из двух стержней, различной плотности. Слева стержень более легкий, справа более тяжелый. Плотности материалов относятся как 1:3. Длины левого и правого стержня относятся как 2:1. В каком отношении центр масс составного стержня делит его длину?
3. В озере плавает жмых в форме кубика массой 160 г. Ту часть кубика, которая находится под водой, начинает есть рыбка со скоростью 15 г в минуту. Одновременно с ней надводную часть начинает есть птичка со скоростью 5 г в минуту. Сколько грамм съест птичка? Плотность жмыха  $0,6 \text{ г/см}^3$ , плотность воды  $1 \text{ г/см}^3$ .
4. Фермер приобрел квадратное поле, через которое проходит узкая тропинка. Осматривая поле, он прошел по участку  $AB$  за 15 минут, затем свернул под прямым углом налево и прошел по участку  $BC$  за 8 минут. После этого он свернул под прямым углом направо и прошел по участку  $CD$  за 6 минут. Всё это время он шел с постоянной скоростью 3 км/час. Он решил, что на верхней части поля (окрашена светлым) он посадит дыни, которые в этих краях дают урожайность 300 ц/га, и которые можно продать по цене 4 тыс. руб./ц. На нижней части поля (окрашена темным) он посадит арбузы, урожайность которых 400 ц/га, цена продажи – 3 тыс. руб./ц. Определите суммарную выручку фермера.
5. Космический аппарат обнаружил систему из двух звезд Alpha и Beta, расстояние между которыми  $2L$  не меняется со временем и поблизости от которых нет других массивных объектов. Были измерены действующие на аппарат со стороны звезд суммарные силы в двух разных точках прямой, проходящей через эти звезды:  
--- когда аппарат находился на равном расстоянии от этих двух звезд;  
--- когда аппарат находился на расстоянии  $L$  от звезды Alpha.  
Отношение первой суммарной силы ко второй оказалось равно  $n$ .



А) Найдите отношение массы звезды Alpha к массе звезды Beta, если  $n=1/2$ .

Б) Определите возможные значения отношения масс этих двух звезд для каждого неотрицательного значения  $n$ .

18 февраля 2024 г.

Решение.

1. Ответ: 7,5.

Пусть собственная скорость катера и скорость течения реки равны соответственно  $x$  км/ч и  $y$  км/ч.  
Если плот преодолеет расстояние  $S$  км между пристанями А и Б за  $t$  часов, то

$$ty = (t - 6)(x + y) = (t - 5)(x - y) \Rightarrow \frac{x + y}{y} = \frac{t}{t - 6} \text{ и } \frac{x - y}{y} = \frac{t}{t - 5}.$$

Тогда

$$2 = \frac{x + y}{y} - \frac{x - y}{y} = \frac{t}{t - 6} - \frac{t}{t - 5} \Rightarrow 2(t - 5)(t - 4) = t.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем  $t = 4$  или  $t = \frac{15}{2}$ . По условию задачи  $t > 6$ , поэтому  $t = \frac{15}{2} = 7,5$  (часов).

2. Ответ: 19: 11.

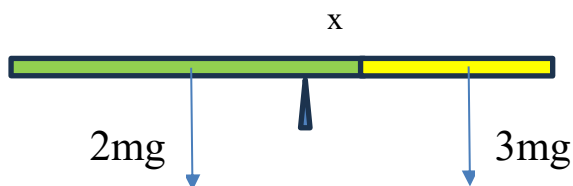
Из условия задачи следует, что длина  $l$  более плотного стержня в 2 раза меньше, чем длина менее плотного стержня, а плотность легкого стержня  $\rho$  в три раза меньше плотности тяжелого. Из этих условий получим соотношение масс стержней  $(2l \cdot \rho) : (l \cdot 3\rho) = 2:3$ . Из условия равновесия будем иметь

$$2mg(l - x) = 3mg\left(\frac{l}{2} + x\right) \Rightarrow 2(l - x) = 3\left(\frac{l}{2} + x\right) \Rightarrow x = \frac{l}{10}$$

Тогда отношение частей составного стержня слева и справа от центра масс будет равно

$$(2l - l/10) : \left(l + \frac{l}{10}\right) = \frac{19}{10} : \frac{11}{10} = 19:11$$

Ответ: 19: 11



3. Ответ: 40 г.

Пока жмых не съели полностью, часть его будет находиться под водой, а часть над водой (при этом не имеет значения, в какой пропорции). Поэтому рыбка и птичка закончат есть одновременно. За это время рыбка съест  $\frac{15}{15+5} \cdot 160 = 120$  г, а птичка  $\frac{5}{15+5} \cdot 160 = 40$  г.

Численные значения плотностей здесь роли не играют.

4. Ответ: 75,75 млн. руб.

Длины участков  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  (они получаются умножением скорости на соответствующее время) равны соответственно  $3 \cdot \frac{15}{60} = \frac{3}{4}$  км = 750 м,  $3 \cdot \frac{8}{60} = 0,4$  км = 400 м,  $3 \cdot \frac{6}{60} = 0,3$  км = 300 м.

Продолжим параллельные прямые  $AB$  и  $CD$  и проведем перпендикулярные им линии через точки  $A$  и  $D$ . В результате получим прямоугольник с диагональю  $AD$ . Стороны прямоугольника равны  $750 + 300 = 1050$  м и 400 м. Затем по теореме Пифагора находим:  $AD^2 = 1050^2 + 400^2 = 1\,262\,500$ . Поскольку квадрат диагонали равен удвоенной площади квадратного поля, то площадь поля равна  $631\,250$  кв. м. = 63,125 га.

Дыни приносят по  $300 \cdot 4 = 1200$  тыс. руб. с гектара. Так как и  $400 \cdot 3 = 1200$ , то арбузы с гектара приносят такую же выручку, что и дыни. Поэтому суммарная выручка фермера равна  $63,125 \cdot 1200 = 75\,750$  тыс. руб. = 75,75 млн. руб.

5. Ответ: А)  $\frac{17}{27}$  или  $\frac{19}{9}$ .

Б)  $\frac{9-n}{9n+9}$ , если  $n \in \{0\} \cup [1; 9)$ ;

$\frac{9-n}{9n+9}$  или  $\frac{9+n}{9-9n}$ , если  $n \in (0; 1)$ ;

ситуация невозможна, если  $n \geq 9$ .

Решение. В первом случае силы притяжения действуют в разные стороны и датчики фиксируют величину:

$$F_1 = G (m |M_A - M_B|) / L^2,$$

где  $m$  — масса аппарата,  $M_A, M_B$  — массы звезд.

Во втором случае

$$F_2 = G \frac{m}{L^2} (M_A + M_B/9).$$

По условию

$$n = \frac{|M_A - M_B|}{M_A + \frac{M_B}{9}} = \frac{(|x-1|)}{(x+\frac{1}{9})} = \frac{(9|x-1|)}{(9x+1)}, \text{ где } x = \frac{M_A}{M_B} > 0, n \geq 0.$$

Если  $0 < x < 1$ , то имеем уравнение  $9nx + n = 9 - 9x$ , и  $x = \frac{9-n}{9n+9}$ . Это решение имеет смысл, если  $0 < n < 9$ .

Если  $x \geq 1$ , то имеем уравнение  $9nx + n = 9x - 9$ , и  $x = \frac{9+n}{9-9n}$ .

Это решение имеет смысл, если  $0 < n < 1$ .

Таким образом, если  $n \geq 9$ , то ситуация невозможна;

если  $1 \leq n < 9$ , то отношение масс находится однозначно и равно  $\frac{9-n}{9n+9}$ ;

если  $0 \leq n < 1$ , то имеется два решения  $\frac{9-n}{9n+9}$  и  $\frac{9+n}{9-9n}$ . Они совпадают, если  $n = 0$ .