

**Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2021/2022 учебного года для 7 – 8 классов

Вариант 22-78

1. Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найдите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.
2. Даны три жидкости, плотности которых относятся как $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 6 : 3 : 2$. Из этих жидкостей готовят смесь, в которой первой жидкости должно быть больше, чем второй, как минимум в 3,5 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы после их перемешивания плотность смеси оказалась равной среднему арифметическому плотностей исходных жидкостей?
3. Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 90 м, шириной 60 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 26 м, 31,9 м).
4. Горячее масло при температуре 100°C в объеме двух литров смешали с одним литром холодного масла при температуре 20°C. Какой объем будет иметь смесь, когда в смеси установится термодинамическое равновесие? Потерями тепла во внешнюю среду можно пренебречь. Коэффициент объемного расширения масла $2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.
5. Гаврила сел в электричку с полностью заряженным смартфоном, и ровно к концу поездки его смартфон полностью разрядился. При этом половину всего времени он играл в Тетрис, а вторую половину смотрел мультики. Известно, что смартфон полностью разряжается за 3 часа просмотра видео или за 5 часов игры в Тетрис. Какое расстояние проехал Гаврила, если электричка половину пути двигалась со средней скоростью 80 км/ч, вторую половину пути – со средней скоростью 60 км/ч? Ответ дайте в километрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

09 марта 2022 г.

**Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2021/2022 учебного года для 9 классов

Вариант 22-9

1. Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найдите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.
2. Даны три жидкости, плотности которых относятся как $\rho_1:\rho_2:\rho_3 = 6:3:2$. Из этих жидкостей готовят смесь, в которой первой жидкости должно быть больше, чем второй, как минимум в 3,5 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы после их перемешивания плотность смеси оказалась равной среднему арифметическому плотностей исходных жидкостей?
3. Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 90 м, шириной 60 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 26 м, 31,9 м).
4. Горячее масло при температуре 100°C в объеме двух литров смешали с одним литром холодного масла при температуре 20°C . Какой объем будет иметь смесь, когда в смеси установится термодинамическое равновесие? Потерями тепла во внешнюю среду можно пренебречь. Коэффициент объемного расширения масла $2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.
5. Гаврила сел в электричку с полностью заряженным смартфоном, и ровно к концу поездки его смартфон полностью разрядился. При этом половину всего времени он играл в Тетрис, а вторую половину смотрел мультики. Известно, что смартфон полностью разряжается за 3 часа просмотра видео или за 5 часов игры в Тетрис. Какое расстояние проехал Гаврила, если электричка половину пути двигалась со средней скоростью 80 км/ч, вторую половину пути – со средней скоростью 60 км/ч? Ответ дайте в километрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

09 марта 2022 г.

Решение.

1. Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найдите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ: 208

$$v = at, 100000/3600 = a \cdot 15, \text{ откуда } a = 1,85 \text{ (м/с}^2\text{)}. \text{ Тогда } S = at^2/2 = 208 \text{ (м)}.$$

2. Даны три жидкости, плотности которых относятся как $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 6 : 3 : 2$. Из этих жидкостей готовят смесь, в которой первой жидкости должно быть больше, чем второй, как минимум в 3,5 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы после их перемешивания плотность смеси оказалась равной среднему арифметическому плотностей исходных жидкостей?

Пусть плотность первой жидкости равна $\rho_1 = 6k$. Тогда $\rho_2 = 3k, \rho_3 = 2k$. Средняя арифметическая плотность $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3} = \frac{11}{3}k$. Введем обозначения $\frac{m_2}{m_1} = x, \frac{m_3}{m_1} = y$. По условию $\frac{1}{x} \geq 3,5$. Результирующую плотность смеси можно выразить формулой $\frac{m_1 + m_2 + m_3}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3}} = \rho$. С уче-

том обозначений и небольших преобразований получим:

$$\frac{\rho}{6k} = \frac{1+x+y}{1+2x+3y} \Leftrightarrow \frac{1+x+y}{1+2x+3y} = \frac{11}{18} \Leftrightarrow 4x + 15y = 7. \text{ Положим } x = \frac{1}{4}, \text{ тогда } y = \frac{2}{5}. \text{ Это значит, что}$$

можно положить $m_1 = 20z, m_2 = 5z, m_3 = 8z$.

Ответ: например: 20:5:8 или 7:1:3 или любой, удовлетворяющий уравнению $4x + 15y = 7$

при условии $\frac{1}{x} \geq 3,5$.

3. Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 90 м, шириной 60 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 26 м, 31,9 м).

Ответ: 27,1

Пусть в прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Разместим прожекторы на потолке над точками, являющимися серединами отрезков AO , BO , CO и DO , на высоте, равной четверти диагонали прямоугольника. Тогда первый прожектор будет полностью освещать круг, внутри которого находится прямоугольник с диагональю AO), второй прожектор будет освещать прямоугольник с диагональю BO и так далее. В итоге всё поле будет

освещено. В этом случае высота потолка равна $\frac{\sqrt{90^2 + 60^2}}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{117} = \frac{15}{2}\sqrt{13}$ м.

Необходимо доказать, что более «выгодного» расположения нет. Для этого применяем принцип Дирихле. Если взять 5 точек на поле: точки A , B , C , D и O (важно, что расстояние между любыми двумя из этих точек не меньше, чем половина диагонали прямоугольника), и предположить, что диаметр круга меньше, чем половина диагонали, то один прожектор осветит не больше, чем одну из этих четырех точек. Значит, хотя бы одна из этих 5 точек окажется неосвещенной.

Осталось оценить сверху величину $\frac{15}{2}\sqrt{13}$. Так как $\frac{15}{2}\sqrt{13} = \sqrt{731,25}$, а $27^2 = 729 < 731,25 < 734,41 = 27,1^2$, то высота потолка должна быть равна 27,1 м.

4. Горячее масло при температуре 100°C в объеме двух литров смешали с одним литром холодного масла при температуре 20°C . Какой объем будет иметь смесь, когда в смеси установится термодинамическое равновесие? Потерями тепла во внешнюю среду можно пренебречь. Коэффициент объемного расширения масла $2 \cdot 10^{-3} \text{ } 1/^\circ\text{C}$.

Ответ: 3

Пусть $V_1 = 2$ л – объем горячего масла, а $V_2 = 1$ л – объем холодного масла. Тогда можно записать $V_1 = U_1(1 + \beta t_1)$, $V_2 = U_2(1 + \beta t_2)$, где U_1, U_2 – объемы соответствующих порций масла при нулевой температуре; $t_1 = 100^\circ\text{C}$, $t_2 = 20^\circ\text{C}$; $\beta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ – коэффициент объемного расширения.

Из уравнения баланса тепла: $cm_1(t - t_1) + cm_2(t - t_2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$, где m_1, m_2 – массы горячей и холодной порций масла соответственно; t – температура смеси.

Заметим, что $m_1 = U_1 \rho$, $m_2 = U_2 \rho$, где ρ – плотность масла при нулевой температуре.

Тогда $W_1 = U_1(1 + \beta t)$, $W_2 = U_2(1 + \beta t)$. Здесь W_1, W_2 – объемы исходных порций масла при температуре t .

Новый общий объем масла будет равен

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= (U_1 + U_2)(1 + \beta t) = \left(\frac{m_1}{\rho} + \frac{m_2}{\rho}\right)(1 + \beta t) = \frac{1}{\rho}(m_1 + m_2 + (m_1 + m_2)\beta t) = \\ &= \frac{1}{\rho}(m_1 + m_2 + m_1\beta t_1 + m_2\beta t_2) = \frac{1}{\rho}(m_1 + m_1\beta t_1) + \frac{1}{\rho}(m_2 + m_2\beta t_2) = \frac{m_1}{\rho}(1 + \beta t_1) + \frac{m_2}{\rho}(1 + \beta t_2) \end{aligned}$$

То есть, $W_1 + W_2 = U_1(1 + \beta t_1) + U_2(1 + \beta t_2) = V_1 + V_2$

Таким образом, объем не изменится.

5. Гаврила сел в электричку с полностью заряженным смартфоном, и ровно к концу поездки его смартфон полностью разрядился. При этом половину всего времени он играл в Тетрис, а вторую половину смотрел мультики. Известно, что смартфон полностью разряжается за 3 часа просмотра видео или за 5 часов игры в Тетрис. Какое расстояние проехал Гаврила, если электричка половину пути двигалась со средней скоростью 80 км/ч, вторую половину пути – со средней скоростью 60 км/ч? Ответ дайте в километрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ: 257

Примем «емкость» батареи смартфона за 1 условную единицу (у. е.). Тогда скорость разрядки смартфона при просмотре видео равна $\frac{1}{3}$ у. е./час, скорость разрядки при игре равна

$\frac{1}{5}$ у.е./час. Если все время движения обозначить за t часов, то получаем уравнение

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{t}{2} = 1, \text{ откуда } \frac{(5+3)t}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 1, \text{ то есть } t = \frac{15}{4} \text{ часа.}$$

Тогда получается (здесь S – длина пути): $\frac{S}{2 \cdot 80} + \frac{S}{2 \cdot 60} = \frac{15}{4}$, то есть $\frac{S}{40} + \frac{S}{60} = 15$,

$$S = 15 \cdot \frac{40 \cdot 3}{4 + 3} = \frac{1800}{7} \approx 257 \text{ км.}$$