

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2021/22 учебного года для 7-8 классов

Задача 1. Три друга-штангиста А, Б и В приехали на соревнования. Они все соревновались в одной весовой категории, и один из них стал победителем. Если вес, поднятый штангистом А, сложить с весом, поднятым штангистом Б, получится 220 кг, если сложить веса, поднятые штангистами А и В, то получится 240 кг, а если сложить веса, поднятые штангистами Б и В, то получится 250 кг. Какой вес поднял победитель соревнований?

Ответ: 135.

Решение. Сумма трех весов равна $(220 + 240 + 250)/2 = 355$. Поэтому В поднял $355 - 220 = 135$, Б поднял $355 - 240 = 115$, А поднял $355 - 250 = 105$. Победил В = 135.

Задача 2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}?$$

Ответ: 53.

Решение. Избавляясь от знаменателей, получим уравнение

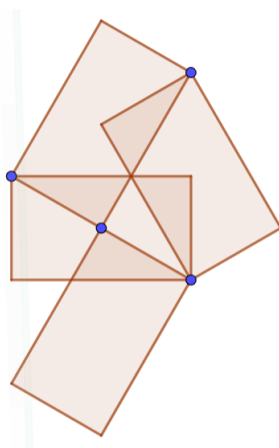
$$(x - 2022)(y - 2022) = 2022^2.$$

Поскольку $2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$, то число $x - 2022$ может иметь множитель $2^0, 2^1, 2^2$ — всего три варианта. Аналогично с остальными множителями. У числа $x - 2022$ получается $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ возможных натуральных значений, то есть 54 целых значения. Правда, одному из них соответствует $x = 0$, который исходному уравнению не удовлетворяет. Следовательно, корней 53 (при каждом подходящем значении x имеем $y = \frac{2022^2}{x-2022} + 2022$ — целое число).

Задача 3. Можно ли на плоскости расположить четыре одинаковых прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была ровно одна общая вершина? (Прямоугольники могут накладываться друг на друга.)

Ответ: Да.

Решение. См. чертёж.



Возможны и другие примеры.

Задача 4. Для бесконечной последовательности чисел x_1, x_2, x_3, \dots при всех натуральных $n \geq 4$ выполняется соотношение $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. Известно, что $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$. Найдите x_{2022} .

Ответ: 1.

Решение. Все члены последовательности по модулю равны 1. Отметим положительные плюсом, а отрицательные — минусом. Выпишем начало последовательности:

$$[++---+-]++---+-++\dots$$

Видно, что три стоящих подряд члена полностью определяют то, как последовательность будет выглядеть дальше. Значит, если мы снова увидим $++-$, как в начале, то последовательность начнёт повторяться. Получается, что период равен семи, значит на 2022 месте стоит то же, что и на шестом ($2022 = 6 \pmod{7}$).

Задача 5. Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число \overline{abcde} . Про двузначные числа $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 157605.$$

Найдите число \overline{abcde} . Многочисленные числа не могут начинаться с нуля.

Ответ: 12345 или 21436.

Решение. Заметим, что $157605 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$. Для начала нужно понять, какие сочетания простых множителей соответствуют суммам двузначных чисел. Сумма двузначных чисел не может быть более $99+99=198$, а уже $79 \cdot 3$ больше 200, поэтому какая-то из скобок равна 79. Как могут быть распределены оставшиеся множители? $79(19 \cdot 5)(3 \cdot 7)$; $79(19 \cdot 7)(3 \cdot 5)$; $79(3 \cdot 19)(5 \cdot 7)$; $79(19)(3 \cdot 5 \cdot 7)$. Других случаев нет, потому что в них получается множитель больше 198.

Так получаем тройки чисел $(79; 95; 21)$, $(79; 133; 15)$, $(79; 57; 35)$, $(79; 19; 105)$. Теперь заметим вот что: $(\overline{xy} + \overline{yz}) = 10x + y + 10y + z = 10(x + y) + (y + z)$, при этом суммы цифр не могут быть больше $9+9=18$. То есть, например, если $(\overline{xy} + \overline{yz}) = 79$, то это значит, что $x + y = 7$, $y + z = 9$. Если $(\overline{xy} + \overline{yz}) = 133$, то либо $x + y = 13$, $y + z = 3$, либо $x + y = 12$, $y + z = 13$. Если $(\overline{xy} + \overline{yz}) = 15$, то либо $x + y = 1$, $y + z = 5$, либо $x + y = 0$, $y + z = 15$. Скажем, мы остановимся на наборе чисел $(7, 9)$, $(12, 13)$, $(1, 5)$, где числа означают возможные суммы соседних цифр \overline{abcde} .

Но при этом, если взять число \overline{abcde} , то у него будет всего 4 возможные пары соседних цифр, поэтому в наборе может быть не более 4-х различных значений. Тем самым мы отмечаем выбранный набор, как и все остальные — кроме одного, которым будет $(79; 57; 35)$, с числами $(7, 9)$, $(5, 7)$, $(3, 5)$. У него всего 4 различных значения: 9, 7, 5, 3. Более того, эти пары чисел нужно разместить так, чтобы значения «состыковались», то есть так: $(3, 5), (5, 7), (7, 9)$. То есть для \overline{abcde} будет верно следующее: $a + b = 3$, $b + c = 5$, $c + d = 7$, $d + e = 9$. У такой системы всего 4 решения, соответствующие 5-значным последовательностям 12345, 21436, 30527, 03254, последняя из которых не подходит, так как начинается с нуля, а предпоследняя — так как для этой последовательности $\overline{bc} = 05$.

Задача 6. В квадратной комнате на каждой стене есть лампочка, которая может гореть одним из семи цветов радуги. В комнате нет лампочек, которые горели бы одним цветом. За один ход человек может поменять цвет одной из лампочек, на тот, которым не горит ни одна лампочка в комнате на момент совершения хода, при этом он тоже изменит цвета на два оставшихся не использованных цвета. (После этого в комнате по-прежнему нет двух лампочек с одинаковыми цветами). Какое наименьшее число ходов нужно совершить, чтобы в результате каждая лампочка погорела каждым из семи цветов?

Ответ: 8 ходов.

Решение. Лампочка на каждой стене комнаты должна шесть раз поменять цвет, всего стены четыре, поэтому суммарное число изменений цветов не меньше 24. С другой стороны, за один ход меняется цвет у трёх лампочек, поэтому число ходов не меньше 8. Можно привести пример для 8 ходов (см. рисунок).

