

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{\sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{77}{(38 \cdot 39)^2} + \frac{79}{(39 \cdot 40)^2}?$$

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1 - x^9}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\dots f(2022)))))),$$

где функция f применяется 1305 раз.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60° . Снаружи этого конуса расположены 17 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c . Найдите все значения t , при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 121t; \quad b = 2^t - 32; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2) \operatorname{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2) \operatorname{ctg} x + 4a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0; \pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота CL остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке Q . Точка S лежит на отрезке AB так, что величина угла CSQ максимальна. Найдите LS , если $AL = 2$, $LB = 5$.