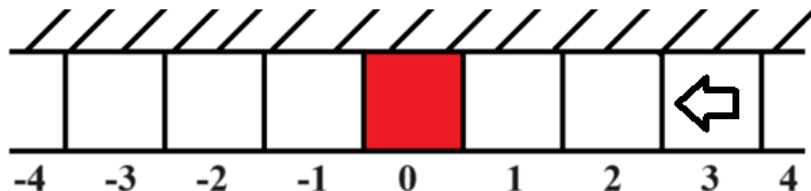


№1 (10 баллов) Вдоль стены в одну линию выложи квадратные плитки одинакового размера. Толщина линии — одна плитка. Среди всех плиток есть одна красная, остальные — белые. Красная плитка расположена так, что слева и справа от неё находится одинаковое число плиток.

В момент старта робот ориентирован строго влево (см. Схему). Стрелка на схеме обозначает первоначальное положение и ориентацию робота. Робот может двигаться вперёд и назад вдоль стенки по плиткам. Перемещаясь на одну плитку, робот останавливается в центре соседней.



Схема

Робот выполнил программу:

Начало

Повторить 2 раза

Вперёд на 5 плиток

Назад на 2 плитки

Повторить 3 раза

Вперёд на 3 плитки

Конец Повторить

Назад на 4 плитки

Конец Повторить

Назад на 1 плитку

Конец

Определите, на какой плитке окажется робот после окончания работы программы. Укажите положение робота относительно красной плитки. Ответ дайте в виде целого числа. Гарантируется, что в процессе выполнения программы робот всегда будет двигаться по плиткам.

Справка

Если после выполнения программы робот окажется на красной плитке, то запишите 0, если робот будет правее красной плитки, то запишите номер плитки, на которой находится робот (например 1), если робот находится левее красной плитки, то запишите номер плитки со знаком минус, (например -1).

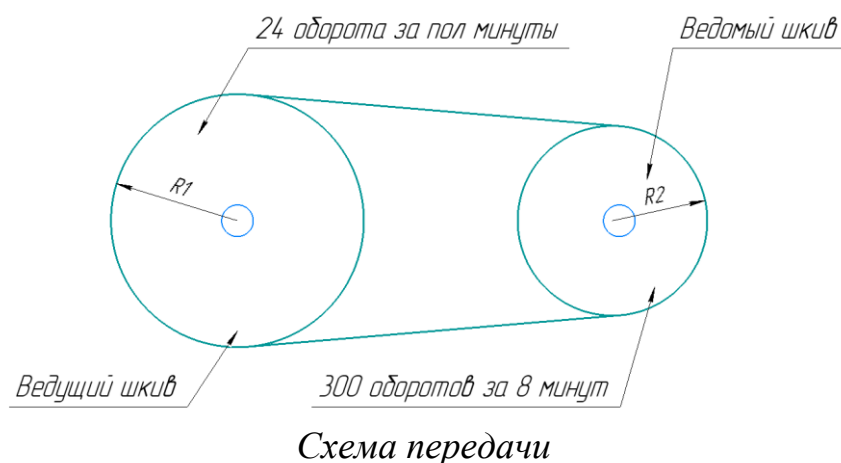
10 баллов за полностью верный ответ

Ответ: -12

Решение

Программа состоит из трёх частей — из цикла, из линейной части и из ещё одного цикла. Посчитаем положение робота, при этом проезд вперёд можно заменить на на вычитание, проезд назад - на сложение, а цикл можно заменить на умножение: $3+2*(-5+2+3*(-3)+4)+1=4+2*(-14+6)=4-16=-12$

№2 (10 баллов) Из двух шкивов и ремня собрали ремённую передачу (См. Схему передачи). Определите, на сколько процентов нужно уменьшить радиус ведущего шкива, оставив при этом без изменения ведомый шкив, чтобы сохранить частоту вращения ведомого шкива, если ведущий шкив будет делать по 50 оборотов за треть минуты.



10 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 68

Решение

Число оборотов ведущего шкива в минуту первоначально:

$$24/0,5=48 \text{ (об./мин.)}$$

Число оборотов ведомого шкива в минуту первоначально:

$$300/8=37,5 \text{ (об./мин.)}$$

Число оборотов ведущего шкива в минуту после модернизации:

$$50/(1/3)=150 \text{ (об./мин.)}$$

Частоты вращения осей шкивов обратно пропорциональны радиусам шкивов:

$$\frac{48}{37,5} = \frac{R2}{R1}$$

Выразим R2:

$$R2=1,28R1(1)$$

После модификации:

$$\frac{150}{37,5} = \frac{R2}{R11}$$

Выразим R2:

$$4R11=R2(2)$$

Приравняет (1) и (2), и получим:

$$4R11=R2=1,28R1$$

$$4R11=1,28R1$$

$$R11=0,32R1$$

То есть, радиус ведущего шкива нужно уменьшить на:

$$\frac{R1 - 0,32R1}{R1} * 100\% = 68\%$$

№3 (15 баллов) Из резисторов собрали участок цепи (См. Схему участка цепи АВ). Номинал резисторов равен $R_1=R_3=R_5=100\text{ Ом}$, $R_2=R_4=200\text{ Ом}$. Определите, чему равно сопротивление участка АВ. Ответ дайте в омах. Сопротивлением проводов пренебрегите.

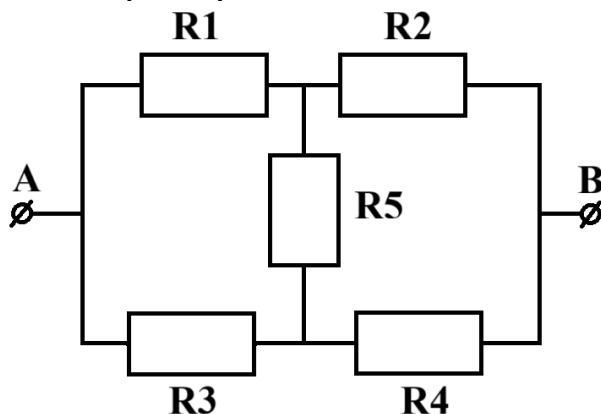


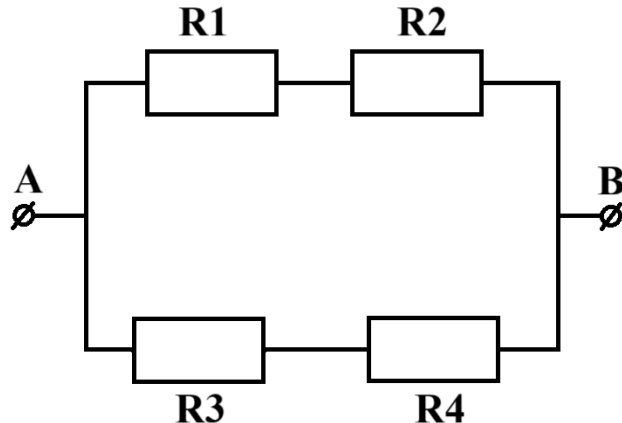
Схема участка цепи АВ

15 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 150

Решение

Так как $R_1=R_3$, $R_2=R_4$, то ток через мостик R_5 не потечёт. Значит, мы можем отключить сопротивление R_5 . Тогда мы получим схему:



Тогда сопротивление участка АВ буде равно:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{100 + 200} = \frac{1}{150}$$

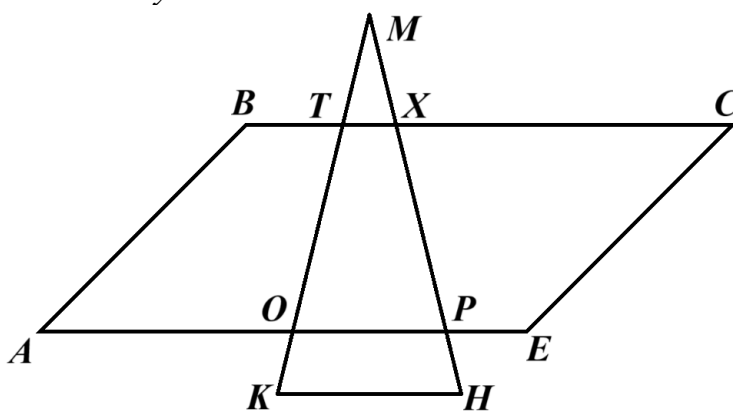
Значит, общее сопротивление участка равно $R=150\text{ Ом}$

№4 (20 баллов) Робот движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (См. Рисунок) при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс. Изображение составлено из пересекающихся треугольника КМН и параллелограмма АВСЕ. Известно, что $BC \parallel KH$, $KM = MN$, $\angle A = \angle M = 50^\circ$. Все повороты робот должен совершать на месте. Робот должен проехать по каждому отрезку траектории ровно по одному разу. **Робот не может ехать назад.** Определите минимальный суммарный угол поворота робота при проезде по всей траектории. Ответ дайте в градусах.

Справочная информация

Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается.

Так как робот не может ехать назад, то угол поворота робота равен углу, дополняющему угол многоугольника до 180° .



Рисунок

20 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 720

Решение

Так как АВСЕ - параллелограмм, то $\angle A = \angle C = 50^\circ$, $\angle B = \angle E = 130^\circ$, $BC \parallel AE$.

Так как $KM = MN$, то МКН - равнобедренный треугольник, а, значит, $\angle MKN = \angle MNK = (180^\circ - 50^\circ)/2 = 65^\circ$

Так как $KH \parallel TX \parallel AE$, то $\angle K = \angle MOP = \angle N = \angle MPO = \angle MTX = \angle MXT = 65^\circ$.

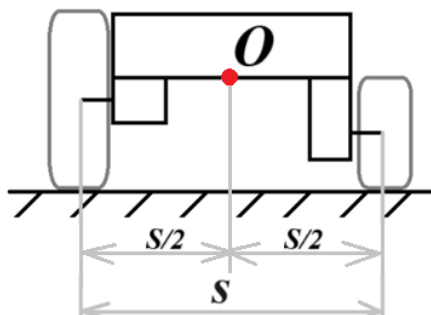
Чтобы уменьшить суммарный угол поворота, нужно максимальное число вершин проехать «насквозь», не поворачивая в них.

Для уменьшения угла поворота стартуем в вершине с минимальной градусной мерой. После старта выгодно объехать одну фигуру по периметру до точки поворота, повернуть на новую фигуру по минимально возможному углу, проехать её по периметру, после чего снова повернуть по минимально возможному углу и доехать снова по первой фигуре.

Суммарный угол поворота робота будет равен:

$$360^\circ + 180^\circ + 50^\circ + 65^\circ + 65^\circ = 720^\circ$$

№5 (20 баллов) Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами разного радиуса. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Расстояние S равно 60 см (см. Рисунок). Моторы уставлены так, что если каждый из моторов повернётся на соответствующее положительное число градусов, то робот поедет прямо вперёд.



Рисунок

Радиус колеса, подсоединённого к мотору А, равен 15 см, радиус колеса, подсоединённого к мотору В, равен 6 см. Колёса так расположены на роботе, что его верхняя грань горизонтальна. Каждое из колёс робота повернулось на 720° . Определите, по окружности какого радиуса будет двигаться точка О (см. Рисунок). Ответ дайте в сантиметрах. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$.

20 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 70 см.

Решение

Так как радиус колеса А больше, чем радиус колеса В, и каждое из колёс повернулось на одинаковое число градусов, то колесо А пойдёт по окружности, большей, чем колесо В. Центр дуг окружностей, по которым будут двигаться центры колёс, расположен по одну сторону от точек А и В, снаружи робота.

Обозначим за R радиус окружности, по которой движется точка О. Тогда радиусы окружностей, по которым движутся колёса, будут равны:

$$R_a = R + (60:2) = R + 30$$

$$R_b = R - (60:2) = R - 30$$

Каждое из колёс повернулось на одинаковый угол, значит, колёса прошли по дугам концентрических окружностей, длины которых можно найти, исходя из пути, пройденного колёсами.

Для колеса А:

$$2\pi * 15 * 720^\circ / 360^\circ = 60\pi (\text{см})$$

Для колеса В:

$$2\pi * 6 * 720^\circ / 360^\circ = 24\pi (\text{см})$$

Пусть градусная мера каждого из центральных углов дуг, по которым пойдёт робот, равна x . Тогда длины дуг окружностей можно записать следующим образом для колеса А:

$$2\pi * (R + 30) * \frac{x}{360} = 60\pi$$

$$2\pi * (R - 30) * \frac{x}{360} = 24\pi$$

Разделим обе части каждого из равенств на 2π , получим:

$$(R + 30) * \frac{x}{360} = 30$$

$$(R - 30) * \frac{x}{360} = 12$$

Разделим первое равенство на второе, получим:

$$\frac{R + 30}{R - 30} = \frac{30}{12}$$

Воспользуемся правилом пропорции:

$$12*(R+30)=30(R-30)$$

$$12R+360=30R-900$$

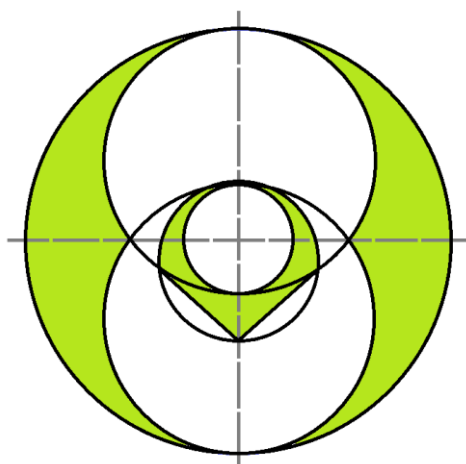
$$18R=1260$$

$$R=70 \text{ (см)}$$

Радиус равен 70 см.

№6 (25 баллов) Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс.

Изображение составлено из пяти окружностей. Есть две концентрические окружности, радиус одной из них в 3 раза больше, чем диаметр другой. Этих окружностей касаются две средние окружности одинакового радиуса. Пятая окружность имеет диаметр, который равен радиусу одной из средних окружностей. Центры всех окружностей лежат на одной прямой. Два отрезка выходят из одной точки, лежащей на линии центров, и заканчиваются в точках пересечения пятой окружности и одной из средних окружностей. Изображение, нанесённое роботом, раскрасили зелёной краской как показано на рисунке (См. Рисунок)



Рисунок

Определите, чему равна площадь закрашенной области, если радиус самой маленькой окружности равен 20 см. Ответ дайте в квадратных дециметрах, приведя результат с точностью до целых. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

25 баллов за полностью верный ответ

Ответ: 187 дм²

Решение

Определим длины радиусов окружностей.

Радиус самой большой окружности:

$$3 \cdot 2 \cdot 20 = 120 \text{ (см)}$$

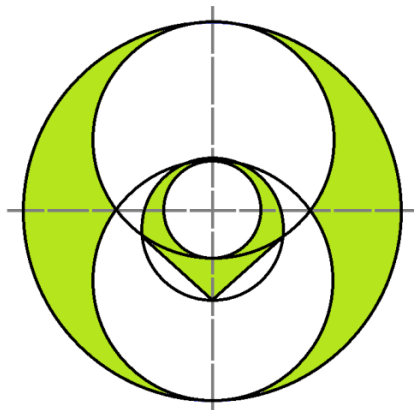
Определим радиус средних окружностей:

$$(120 + 20) / 2 = 70 \text{ (см)}$$

Тогда радиус пятой окружности равен:

$$70 : 2 = 35 \text{ (см)}$$

Проанализируем фигуру, площадь которой нам надо найти.

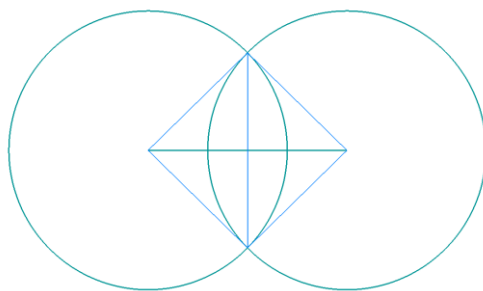


Фигура состоит из двух частей - из внешней и внутренней. Внешняя часть - это большая окружность без учёта двух средних. Внутренняя область - это треугольник с частью пятой окружности без самой маленькой окружности. Определим, чему равна площадь области, по которой пересекаются два средних круга.

Расстояние между центрами средних окружностей равно:

$$2 * 120 - 70 - 70 = 100 (\text{см})$$

Сделаем дополнительные построения - проведём радиусы в точки пересечения средних окружностей:



Получим ромб, в котором диагонали пересекаются под прямым углом. Одна из диагоналей равна расстоянию между центрами окружностей. Тогда вторая диагональ будет равна:

$$2 * \sqrt{70^2 - (100 : 2)^2} = 20\sqrt{49 - 25} = 20\sqrt{24} = 40\sqrt{6} (\text{см})$$

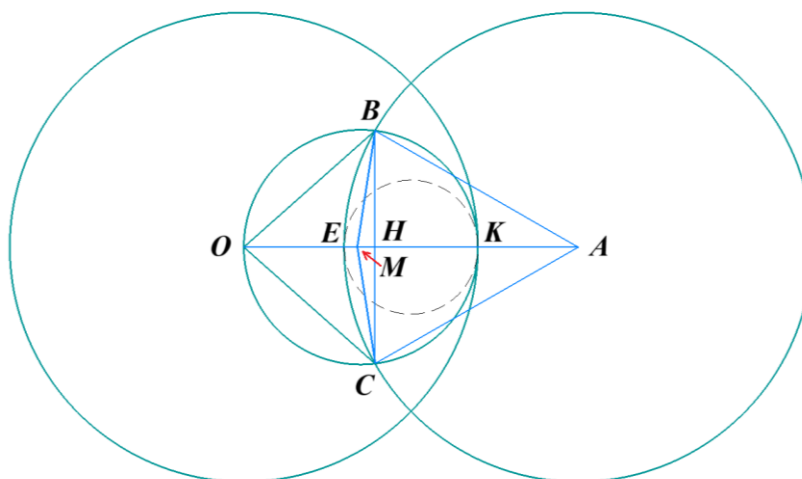
Тогда площадь области, по которой пересекаются средние круги, равна:

$$2 * (\pi * 70^2 * \frac{2 * \arcsin(0,5 * 40\sqrt{6})/70}{360^\circ} - 0,5 * 40\sqrt{6} * 100/2) \approx \\ = 2694,064270... \approx 2694,06427 (\text{см}^2)$$

Тогда площадь внешней части покрашенной фигуры равна:

$$\pi * 120^2 - 2 * \pi * 70^2 + 2694,06427 = \\ = \pi * (14400 - 9800) + 2694,06427 \approx \\ \approx 17138,06427 (\text{см}^2)$$

Рассмотрим внутреннюю часть закрашенной фигуры:



Внутренняя часть фигуры состоит из треугольника и части окружности, из которых исключается окружность меньшего радиуса.

Посчитаем их параметры.

$$OE = OA - EA = 100 - 70 = 30 \text{ (см)}$$

$$KA = OE = 30 \text{ (см)}$$

Точка М - центр пятой окружности, диаметр которой равен 70 см.

$$AM = OA - MO = 100 - 35 = 65 \text{ (см)}$$

Рассмотрим треугольник АВМ. Запишем теорему косинусов для угла ВАМ:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2 * AB * AM * \cos(\angle BAM)$$

$$\cos(\angle BAM) = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 * AB * AM} = \frac{70^2 + 65^2 - 35^2}{2 * 70 * 65} = \frac{79}{91}$$

$$\angle BAM \approx 29,76^\circ$$

$$\angle BAM = \angle BAO$$

$$\angle BAC = 2\angle BAM = 29,76 * 2 = 59,52^\circ$$

Тогда из равнобедренного треугольника ВАС (АВ=АС как радиусы одной окружности):

$$\angle ABC = (180^\circ - \angle BAC) / 2 = (180^\circ - 59,52^\circ) / 2 = 60,24^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{\sin \angle ABC}{AC} = \frac{\sin \angle BAC}{BC}$$

$$BC = AC \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle ABC} = 70 * \frac{\sin 59,52^\circ}{\sin 60,24^\circ} = 69,4915235... \approx 69,491524 \text{ (см)}$$

Из треугольника АВН

$$AH = AB * \cos \angle BAH = AB * \cos \angle BAM =$$

$$= 70 * \frac{79}{91} = \frac{790}{13} = 60 \frac{10}{13} \text{ (см)}$$

$$OH = OA - AH = 100 - 60 \frac{10}{13} = 39 \frac{3}{13} \text{ (см)}$$

Площадь треугольника ВОС равна:

$$0,5 * OH * BC = 0,5 * 69,491524 * 39 \frac{3}{13} = 1363,102970... \approx 1363,10297 \text{ (см}^2\text{)}$$

Определим градусную меру дуги ВКС.

$$МН = ОН - ОЕ = 39\frac{3}{13} - 30 = 9\frac{3}{13} \text{ (см)}$$

$$\sin \angle ВЕН = \frac{ВН}{ВЕ} = \frac{BC/2}{BE} = \frac{69,491524}{2 * 35} =$$

$$= 0,99273605714...$$

$$\angle ВЕН = 83,0898562... \approx 83,09^\circ$$

$$\angle ВЕС = 2 * \angle ВЕН = 2 * 83,09 \approx 166,18^\circ$$

Площадь внутренней части закрашенной области равна:

$$1363,103 - 0,5 * 9\frac{3}{13} * 69,491524 + \pi * 35^2 * \frac{166,18^\circ}{360^\circ} - \pi * 20^2 =$$

$$= 1\,042,372889... + 519,587139... = 1561,960028... \approx$$

$$\approx 1561,960028 \text{ см}^2$$

Тогда общая площадь равна:

$$17138,06427 + 1561,960028 = 18700,024298 \text{ см}^2 = 187,00024298 \text{ дм}^2 \approx 187 \text{ дм}^2$$

Максимальный балл за работу равен 100 баллам