Секция «40.2 Логика»

О строго позитивных логиках естественных теоретико-доказательственных операторов

Научный руководитель – Беклемишев Лев Дмитриевич

Ерёмин Андрей Викторович
Студент (бакалавр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия
E-mail: aerem05@inbox.ru

Строго позитивными назовем формулы, составленные из пропозициональных переменных, $\top$, $\wedge$ и модальностей $\Diamond_0, \Diamond_1, \ldots$. Утверждениями этого языка считаем секвенции $A \vdash B$, где A, B строго позитивны.

Модальные логики в этом языке возникают, с одной стороны, в дескрипционной логике (подробнее см. в [9]), а с другой стороны, в теории доказательств. Доклад посвящен обзору второго направления.

В работах Г.К. Джапаридзе и К.Н. Игнатьева [1], [2], [8] была рассмотрена полимодальная логика **GLP** с модальностями $[n]$ для каждого n и доказана арифметическая полнота относительно интерпретации $[n]$ как доказуемости в теории $\mathrm{PA} + \mathrm{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$.

С опорой на эту интерпретацию и алгебраическую семантику **GLP** Л.Д. Беклемишевым были получены чисто теоретико-доказательственные результаты об ординальном анализе PA и недоказуемости в PA принципа Червя (исчерпывающий обзор см. в [4]). Оказалось, что для этих приложений достаточно рассматривать лишь строго позитивный фрагмент **GLP**, откуда естественным образом встал вопрос об описании этого фрагмента (названного **RC**). Эта задача была решена Е.В. Дашковым, который нашел его аксиоматизацию, показал полноту по Крипке и полиномиальную разрешимость [7]. Начиная с этого момента строго позитивные логики стали активно изучаться в теоретико-доказательственном контексте.

Бедность строго позитивного языка позволяет сформулировать арифметическую интерпретацию, более общую, чем та, что возникает в полном языке. А именно, имея $\Diamond_0^*, \Diamond_1^*, \ldots$ — набор операторов над гёделевыми теориями, можно определить семантику, в которой переменные будут означиваться гёделевыми теориями, а $\Diamond_n$ интерпретироваться как $\Diamond_n^*$. Тогда $A \vdash B$ считается истинной при оценке $*$, если теория A^* (доказуемо) сильнее теории B^*.

В докладе будет рассмотрен ряд примеров естественных операторов подобного рода и соответствующих им строго позитивных логик, таких как логика $\mathbf{RC}_\omega$, получающаяся из **RC** добавлением оператора, расширяющего теорию полной схемой равномерной рефлексии для неё [5], логика $\mathbf{RC}^\nabla$, получающаяся из **RC** добавлением операторов «Π_n-фрагмент теории» [6], и других. Некоторые из них имеют интригующие теоретико-доказательственные приложения, для многих открыт вопрос об арифметической полноте.

Наконец, будут презентованы авторские исследования строго позитивной логики прогрессий Тьюринга, опирающиеся на результаты курсовой работы Т.М. Якобовской [3].

Источники и литература

1) Джапаридзе Г. К. Модально-логические средства исследования доказуемости. Дисс. ... канд. филос. наук. М., МГУ, 1986.

2) Джапаридзе Г. К. Полимодальная логика доказуемости // Интенсиональные логики и логическая структура теорий. Материалы IV Советско-финского симпозиума по логике (Телави, 1985) / Под ред. В. А. Смирнова и М. Н. Бежанишвили. Тбилиси, 1988. С. 16–48.

3) Якобовская Т. М. Строго позитивная бимодальная логика омега-итерированной непротиворечивости: семантика Крипке (не опубликовано)

4) Beklemishev L. D. Reflection principles and provability algebras in formal arithmetic // Russian Mathematical Surveys. 2005. Vol. 60. No. 2. P. 197–268.

5) Beklemishev L. D. Positive provability logic for uniform reflection principles // Annals of Pure and Applied Logic. 2014. Vol. 165. No. 1. P. 82–105.

6) Beklemishev L. D. Reflection calculus and conservativity spectra // Russian Mathematical Surveys. 2018. Vol. 73. No. 4. P. 569–613.

7) Dashkov E. V. On the positive fragment of the polymodal provability logic GLP // Mathematical Notes. 2012. Vol. 91. No. 3. P. 318–333.

8) Ignatiev K. N. On strong provability predicates and the associated modal logics // Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. No. 1. P. 249–290.

9) Kikot S., Kurucz A., Tanaka Y., Wolter F., Zakharyaschev M. Kripke completeness of strictly positive modal logics over meet-semilattices with operators. 2017. ArXiv:1708.03403.