Секция «40.2 Логика»

Содержательно истинные (non-vacuously true) и бессодержательно истинные (vacuously true) кондициональные связки в интуиционистском контексте: несравнимость языков

Научный руководитель – Боброва Ангелина Сергеевна

Зайцев Игорь Васильевич

Аспирант

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет гуманитарных наук, Москва, Россия

E-mail: izaytsev65@gmail.com

Доклад посвящен исследованию выразительных возможностей языков с интенсиональными кондициональными связками в конструктивном контексте, формализуемыми в интуиционистских кондициональных (условных) логиках (подробнее про этот тип логик см. [5], [6], [7], [10], [11], [12]). В 1973 г. Д. Льюис в работе "Counterfactuals" [9] ввел различие между двумя типами кондициональных выражений: бессодержательно истинными (vacuously true) контрфактическими кондиционалами $\Box\!\!\rightarrow$ и содержательно истинными (non-vacuously) контрфактическими кондиционалами $\Box\!\!\Rightarrow$ (называемыми в [9] сильными). (Соответствующие языки будут обозначаться как $\mathcal{L}_{\Box\!\rightarrow}$ и $\mathcal{L}_{\Box\!\Rightarrow}$, причем $\mathcal{L}_{\Box\!\rightarrow} \cap \mathcal{L}_{\Box\!\Rightarrow}$ совпадает с языком классической пропозициональной логики/интуиционистской логики с константой $\bot$.) На сематическом уровне дистинкция между ними фиксируется следующим образом: формула вида $(A \Box\!\!\rightarrow B)$ считается истинной в том случае, когда либо множество ближайших миров к некоторому миру w, относительно которого проводится оценка $(A \Box\!\!\rightarrow B)$, в которых антецедент кондиционала истинен, пусто, либо все такие миры, в которых истинен антецедент кондиционала, являются мирами, в которых истинен консеквент кондиционала. Выражение с содержательно истинным кондиционалом $(A \Box\!\!\Rightarrow B)$ требует дополнительно, чтобы множество ближайших к миру w миров, в которых антецедент истинен, было непустым. Известно, что в классическом контексте иррелевантно то, какой тип кондиционала вводится в язык в качестве исходного: формулы языков $\mathcal{L}_{\Box\!\rightarrow}$ и $\mathcal{L}_{\Box\!\Rightarrow}$ выражают одни и те же семантические условия, а соответствующие этим языкам логики, выступающие как консервативные расширения классической пропозициональной логики, являются рекурсивно эквивалентными по В.А. Смирнову [1]. В частности, можно задать следующие рекурсивные переводы $\varphi\colon \mathcal{L}_{\Box\!\rightarrow} \to \mathcal{L}_{\Box\!\Rightarrow}$ и $\psi\colon \mathcal{L}_{\Box\!\Rightarrow} \to \mathcal{L}_{\Box\!\rightarrow}$ (полагается, что на Var и $\bot$ эти функции ведут себя как диагональ, а на молекулярных формулах из $\mathcal{L}_{\Box\!\rightarrow} \cap \mathcal{L}_{\Box\!\Rightarrow}$ являются гомоморфизмами):

$$\varphi((A_1 \Box\!\!\rightarrow A_2)) = ((\varphi(A_1) \Box\!\!\Rightarrow \top) \to (\varphi(A_1) \Box\!\!\Rightarrow \varphi(A_2)));$$

$$\psi((B_1 \Box\!\!\Rightarrow B_2)) = (\neg(\psi(B_1) \Box\!\!\rightarrow \bot) \wedge (\psi(B_1) \Box\!\!\rightarrow \psi(B_2))).$$

Однако в интуиционистском контексте ситуация изменяется.

Прежде чем будет сформулирован основной результат, будет введен ряд определений (на основе определений из [8]). Пусть даны некоторые кондициональные пропозициональные языки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, некоторый класс интуиционистских кондициональных моделей Mod (предполагается, что у всех таких моделей имеется компонента, соответствующая непустому множеству возможных миров/состояний), а также формулы $A_1 \in \mathcal{L}_1$ и $A_2 \in \mathcal{L}_2$. Тогда A_1 и A_2 *эквивалентны в классе моделей* Mod (обозначение: $A_1 \equiv_{\mathsf{Mod}} A_2$), если

$$\forall \mathfrak{M} \in \mathsf{Mod}\ \forall w \in D(\mathfrak{M})\ \big(\mathfrak{M}, w \models A_1 \iff \mathfrak{M}, w \models A_2\big),$$

где $D(\mathfrak{M})$ есть множество миров модели $\mathfrak{M}$. Язык $\mathcal{L}_2$ *не менее выразительный, чем язык* $\mathcal{L}_1$*, в классе* Mod, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{L}_1\ \exists A_2 \in \mathcal{L}_2\ A_1 \equiv_{\mathsf{Mod}} A_2.$$

Языки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ *несравнимы в классе моделей* Mod, если неверно, что $\mathcal{L}_1$ не менее выразительный, чем $\mathcal{L}_2$, в классе Mod, и неверно, что $\mathcal{L}_2$ не менее выразительный, чем $\mathcal{L}_1$, в классе Mod.

В качестве конкретного типа интуиционистских кондициональных моделей будут рассмотрены интуиционистские селективно-функциональные модели, представляющие собой модификацию селективно-функциональных моделей Б. Челласа [4] через добавление к структуре модели интуиционистского предпорядка $\leq$. Будет описан класс всех интуиционистских селективно-функциональных моделей с глобальным определением отношения выполнимости $\models$ для связок $\Box\!\!\Rightarrow$ и $\Box\!\!\rightarrow$. (Имплементирование глобального отношения выполнимости необходимо для доказательства теоремы о монотонности.) Поскольку глобальное определение выполнимости в точечной интуиционистской селективно-функциональной модели для связки $\Box\!\!\Rightarrow$ является новым, оно будет сформулировано явно (глобальное определение для связки $\Box\!\!\rightarrow$ дано в [7]):

$$\mathfrak{M}, w \models (A \Box\!\!\Rightarrow B) \iff \forall v \geq w \left(f(v, \|A\|_{\mathfrak{M}}) \neq \varnothing \text{ и } f(v, \|A\|_{\mathfrak{M}}) \subseteq \|B\|_{\mathfrak{M}}\right),$$

где $\|C\|_{\mathfrak{M}} = \{v \in D(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M}, v \models C\}$ для $C \in \mathcal{L}_{\Box\Rightarrow}$, а $f \in \mathcal{P}(D(\mathfrak{M}))^{D(\mathfrak{M}) \times \mathcal{P}(D(\mathfrak{M}))}$ есть селективная функция. В отличие от большинства существующей литературы по интуиционистским кондициональным логикам (например, [5], [6], [10], [11], [12]) никакие связи между селективной функцией f и интуиционистским предпорядком $\leq$ (так называемые условия конфлюэнтности [2], [3]) не предполагаются. Тем самым рассматривается наиболее общий класс интуиционистских кондициональных моделей.

Основной результат формулируется таким образом: *языки $\mathcal{L}_{\Box\rightarrow}$ и $\mathcal{L}_{\Box\Rightarrow}$ являются несравнимыми в классе всех интуиционистских селективно-функциональных моделей.* Доказательство несравнимости указанных формализованных языков осуществляется в два этапа. Сначала демонстрируется, что $\mathcal{L}_{\Box\rightarrow}$-формула $(p \Box\!\!\rightarrow \bot)$ для некоторой фиксированной пропозициональной переменной p не может быть эквивалентна никакой $\mathcal{L}_{\Box\Rightarrow}$-формуле в классе всех интуиционистских селективно-функциональных моделей, что осуществляется путем предъявления конкретных $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, а также мира $w \in D(\mathfrak{M}_1) \cap D(\mathfrak{M}_2)$, не различающих никакие $\mathcal{L}_{\Box\Rightarrow}$-формулы, но различающих формулу $(p \Box\!\!\rightarrow \bot)$, то есть обосновывается следующее:

- $\mathfrak{M}_1, w \models (p \Box\!\!\rightarrow \bot)$, $\mathfrak{M}_2, w \not\models (p \Box\!\!\rightarrow \bot)$,
- при этом для любой $A \in \mathcal{L}_{\Box\Rightarrow}$ верно, что $\mathfrak{M}_1, w \models A \iff \mathfrak{M}_2, w \models A$.

Затем демонстрируется, что $\mathcal{L}_{\Box\Rightarrow}$-формула $(q \Box\!\!\Rightarrow \top)$ для некоторой фиксированной пропозициональной переменной q не может быть эквивалентна никакой $\mathcal{L}_{\Box\rightarrow}$-формуле в классе всех интуиционистских селективно-функциональных моделей, что обосновывается посредством предъявления моделей $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$, а также мира $v \in D(\mathfrak{M}_3) \cap D(\mathfrak{M}_4)$, различающих формулу $(q \Box\!\!\Rightarrow \top)$, но не различающих никакие $\mathcal{L}_{\Box\rightarrow}$-формулы, то есть доказывается следующее:

- $\mathfrak{M}_3, v \models (q \Box\!\!\Rightarrow \top)$, $\mathfrak{M}_4, v \not\models (q \Box\!\!\Rightarrow \top)$,
- при этом для любой $B \in \mathcal{L}_{\Box\rightarrow}$ верно, что $\mathfrak{M}_3, v \models B \iff \mathfrak{M}_4, v \models B$.

Непосредственным следствием основного результата является тот факт, что логики, определенные в языках $\mathcal{L}_{\Box\rightarrow}$ и $\mathcal{L}_{\Box\Rightarrow}$ соответственно, не могут быть погружены друг в друга посредством подходящих рекурсивных переводов. Это обстоятельство имплицирует возможность независимой формализации в виде аксиоматического исчисления базовой интуиционистской кондициональной логики, то есть логики класса всех интуиционистских селективно-функциональных шкал, на основе содержательно истинной кондициональной связки $\Box\!\!\Rightarrow$, дальнейшего рассмотрения метасвойств дефинируемого исчисления: корректность, сильная полнота, наличие дизъюнктивного свойства, финитная аппроксимируемость, разрешимость, — а также введения ряда расширений базового исчисления.

Источники и литература

1) Смирнов В.А. Логический анализ научных теорий и отношений между ними // Логико-философские труды В.А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака. М., 2001. С. 381–401.
2) Balbiani Ph., Çigdem G. Intuitionistic Modal Logics: a Minimal Setting, 2025. P. 1–57. URL: https://arxiv.org/pdf/2502.19060 (дата обращения: 01.03.2026).
3) Balbiani Ph. Intuitionistic Epistemic Logic with Two Modal Operators // Synthese. 2025. Vol. 206. No. 169. P. 1–36.
4) Chellas B.F. Basic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 1975. Vol. 5. No. 2. P. 133–153.
5) Ciardelli I., Liu X. Intuitionistic Conditional Logics // Journal of Philosophical Logic. 2020. Vol. 49. No. 4. P. 807–832.
6) Ciardelli I., Liu X. Minimal-Change Counterfactuals in Intuitionistic Logic // Logic, Rationality, and Interaction: 7th International Workshop, LORI 2019, Chongqing, China, October 18–21, 2019, Proceedings / Eds. P. Blackburn, E. Lorini, M. Guo. Berlin; Heidelberg, 2019. P. 43–56.
7) Dalmonte T., Girlando M. A Proof-Theoretic View of Basic Intuitionistic Conditional Logic // Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods: 34th International Conference, TABLEAUX 2025, Reykjavik, Iceland, September 27–29, 2025, Proceedings / Eds. G.L. Pozzato, T. Uustalu. Cham, 2025. P. 354–373.
8) Ditmarsch H., Hoek W., Kooi B. Dynamic Epistemic Logic. Dordrecht, 2007.
9) Lewis D.K. Counterfactuals. Malden, 1973.
10) Olkhovikov G.K. An Intuitionistically Complete System of Basic Intuitionistic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 2024. Vol. 53. No. 5. P. 1199–1240.
11) Weiss Y. Basic Intuitionistic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 2019. Vol. 48. No. 3. P. 447–469.
12) Weiss Y. Frontiers of Conditional Logic. PhD Thesis. New York, 2019.