

О цепях Маркова для бинарных последовательностей с запретом серий единиц

Научный руководитель – Кондратенко Александр Евгеньевич

Тюрин Станислав Евгеньевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: stanislav.turin@math.msu.ru

Бесконечные бинарные последовательности, в которых запрещено появление трёх единиц подряд, можно моделировать как траектории цепи Маркова с тремя состояниями, где состояние определяется окончанием последовательности: C_0 (последний символ 0), C_1 (окончание 01) и C_2 (окончание 011). Матрица переходных вероятностей такой цепи Маркова имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 1 - \alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ — вероятности добавления единицы из соответствующих состояний.

Среди всех стационарных цепей Маркова, порождающих допустимые последовательности, ставится задача нахождения цепи с максимальной энтропией [4]. Показывается, что решение данной задачи совпадает с предельными распределениями теоремы А. О. Гельфонда о системах счисления с нецелым основанием [2]. Такая связь решений есть центральная идея работы.

Разложение вида $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \theta^{-i}$ по нецелому основанию $\theta > 1$, удовлетворяющему уравнению

$$1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$$

для почти всех $\alpha \in [0, 1)$ порождает последовательность $\{\lambda_i\}$, которая не содержит трёх единиц подряд. Более того, первые три числа этой последовательности всегда однозначно определяют принадлежность α одному из трёх интервалов:

$$[0, t_3) = [0, \theta^{-1}), \quad [t_3, t_2) = [\theta^{-1}, \theta^{-1} + \theta^{-2}), \quad [t_2, t_1) = [\theta^{-1} + \theta^{-2}, 1)$$

что соответствует состояниям C_0 , C_1 и C_2 соответственно.

Функция распределения $\sigma(t)$ последовательности остатков $x_n(\alpha) = \{\theta^n \alpha\}$ из теоремы А. О. Гельфонда [2] соответствует стационарному распределению цепи Маркова [3] с максимальной энтропией $H = \ln \theta$, что определяет максимально достижимую непредсказуемость в рассматриваемом классе последовательностей. Это следует из следующих двух теорем.

Теорема 1. [1] *Стационарная цепь Маркова, порождающая двоичные последовательности без трёх подряд идущих единиц и имеющая максимальную энтропию, определяется матрицей переходных вероятностей*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & \frac{\theta-1}{\theta} & 0 \\ \frac{\theta}{\theta+1} & 0 & \frac{1}{\theta+1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\theta \in (1, 2)$ — корень уравнения $1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$. Стационарное распределение имеет вид

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{\theta^3}{\theta^3 + \theta + 2}, \frac{\theta + 1}{\theta^3 + \theta + 2}, \frac{1}{\theta^3 + \theta + 2} \right).$$

Теорема 2. Для почти всех α функция распределения последовательности остатков $x_n(\alpha) = \{\theta^n \alpha\}$ равна

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\pi_1 t}{t_3} & t \in [0, t_3] \\ \frac{\pi_2}{t_2 - t_3} t + \frac{t_3}{t_2 - t_3} \pi_2 + \pi_1 & t \in [t_3, t_2], \\ \frac{\pi_3}{t_1 - t_2} t + \frac{t_2}{t_1 - t_2} \pi_3 + \pi_1 + \pi_2 & t \in [t_2, t_1] \end{cases}, \quad (1)$$

где $t_n = x_n(1)$, а (π_1, π_2, π_3) – распределение из Теоремы 1.

Полученные результаты допускают обобщение на случай запрета серии из k единиц.

Источники и литература

- 1) Тюрин С. Е., Соболев В. Н. Об одной цепи Маркова, связанной с системой счисления // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 299–306.
- 2) Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — Т. 4, № 3. — С. 365–370.
- 3) Ширяев А. Н. Вероятность. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 1999. — Т. 2. — 568 с.
- 4) Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи математических наук. — 1953. — Т. 8, вып. 3(55). — С. 3–20.