Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Предельное поведение модели динамики мнений со случайным выбором лидеров

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Шевченко Борис Викторович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: boris.shevchenko@math.msu.ru

В работе рассматривается марковский процесс с дискретным временем, который описывает систему из N участников и n лидеров. Интерес к моделям такого типа поддерживается и современными исследованиями динамики мнений [3]. Мнение каждого участника в момент времени t задаётся вектором из $\mathbb{R}^d$. Все мнения участников объединяются в матрицу $X(t) \in \mathbb{R}^{d\times N}$. Мнения лидеров задаются матрицей $O \in \mathbb{R}^{d\times n}$. Предлагаемая постановка является обобщением модели, рассмотренной в [1].

Каждый шаг динамики $t \mapsto t+1$ разбивается на два этапа.

Сначала каждый участник i случайно выбирает одного лидера с номером $\varepsilon_i(t)$ и линейно смещает своё мнение на коэффициент $k_{\varepsilon_i(t)} \in \mathbb{R}$ в сторону мнения этого лидера по формуле

$$x_i\,(t+0.5) = (1-k_{\varepsilon_i(t)})x_i(t) + k_{\varepsilon_i(t)}\,\vec{O}_{\varepsilon_i(t)}, \qquad i = 1,\ldots,N.$$

Затем мнения участников согласуются с помощью стохастической матрицы W [2]:

$$X(t+1) = X(t+0.5)W^\top.$$

Цель работы.

Исследование математического ожидания профиля мнений $\mathbb{E}X(t)$. Вывод явной формулы для $\mathbb{E}X(t)$, а также его предела при $t \to \infty$.

Основные результаты.

Получена матричная запись динамики системы,

$$X(t+1) = X(t)Q_t + R_t.$$

где $Q_t = Q_t(\vec{k}, \vec{\varepsilon}(t), W)$, $\;R_t = R_t(\vec{k}, \vec{\varepsilon}(t), W, O)$.

Для профиля мнений выведена явная формула для математического ожидания $\mathbb{E}X(t)$,

$$\mathbb{E}X(t) = \begin{cases} \mathbb{E}X(0)(\alpha W^\top)^t + (1-\alpha^t)\,\dfrac{\mathbb{E}(k_\varepsilon O_\varepsilon)}{\mathbb{E}k_\varepsilon}\mathbf{1}_N^\top, & \mathbb{E}k_\varepsilon \neq 0, \\ \mathbb{E}X(0)(W^\top)^t + t\,\mathbb{E}(k_\varepsilon O_\varepsilon)\mathbf{1}_N^\top, & \mathbb{E}k_\varepsilon = 0. \end{cases}$$

где $\alpha := 1 - \mathbb{E}k_\varepsilon$, $\;\mathbf{1}_N^\top = (1,1,\ldots,1)$ длины N

Исследовано предельное поведение $\mathbb{E}X(t)$ при $t \to \infty$, в частности:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}X(t) = \frac{\mathbb{E}(k_\varepsilon O_\varepsilon)}{\mathbb{E}k_\varepsilon}\,\mathbf{1}_N^\top, \qquad |1-\mathbb{E}k_\varepsilon| < 1.$$

Источники и литература

1) Черных А. А. Стохастические системы с взаимодействием компонент по принципу согласования: дипломная работа. – М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. – URL: https://istina.msu.ru/diplomas/771044391

2) DeGroot M. H. Reaching a Consensus // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. No. 345. P. 118–121.
3) Pansanella V., Sîrbu A., Kertesz J., Rossetti G. Mass media impact on opinion evolution in biased digital environments: a bounded confidence model // Scientific Reports. 2023. Vol. 13. Article No. 14600.