Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Предельая теорема для функции Грина случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ с бесконечной дисперсией скачков

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Иевлев Роман Владимирович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: roman.ievlev@math.msu.ru

Рассматривается стохастическое блуждание с непрерывным временем $\{X_t, t \geq 0\}$, которая задается генератором $A = \|a(x,y)\|_{x,y\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющим условиям регулярности, симметричности и неприводимости. В силу условия однородности по пространству интенсивности можно рассматривать как функции одной переменной $a(x)$, где $x \in \mathbb{Z}$. На интенсивности $a(x)$ накладывается условие

$$a(x) = \frac{H\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}{\|x\|^{d+\alpha}}(1+o(1)), \qquad \|x\| \to \infty, \tag{1}$$

где $\alpha \in (0,2)$, а H — непрерывная четная положительная функция на сфере. Данное условие влечет бесконечную дисперсию скачков случайного блуждания X_t.Переходные вероятности обозначаются $p(t,x)$, см. описание модели в [1].Основным объектом исследования является функция Грина

$$G_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t,x)\, dt, \qquad \lambda gt; 0.$$

Целью работы является изучение предельного поведения $G_\lambda(x)$ при $\|x\| \to \infty$.Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (1). Тогда для любого фиксированного $\lambda gt; 0$ имеем*

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} a(x)(1+o(1)), \qquad \|x\| \to \infty.$$

Для доказательства используем представление процесса X_t в виде составного пуассоновского процесса с использованием метода, описанного, например, в [5,6].Введем следующие обозначения

$$q = \sum_{z\neq 0} a(x), \qquad p_\xi(x) = \frac{a(x)}{q}.$$

Тогда

$$p(t,x) = \mathbb{P}(S_{N_t} = x), \tag{2}$$

где $N_t \sim \mathrm{Pois}(qt)$,$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$,а ξ_i независимы с законом p_ξ.Используя (2) и теорему Леви о монотонной сходимости [2], получаем

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + q}\sum_{n=0}^\infty r^n \mathbb{P}(S_n = x), \qquad r = \frac{q}{\lambda + q}.$$

В доказательстве используется субэкспоненциальная асимптотика, полученная в [3] для фиксированного n

$$\mathbb{P}(S_n = x) = n\, p_\xi(x)(1 + o(1)), \qquad \|x\| \to \infty.$$

После деления на $p_\xi(x)$ предел переносится под знак сходящегося ряда,и используется тождество $\sum_{n\geq 1} nr^n = r/(1-r)^2$,что приводит к коэффициенту λ^{-2}.Таким образом, при выполнении (1), резольвента сохраняет пространственную асимптотику интенсивностей перехода с универсальным множителем λ^{-2}, что отражает доминирование редких крупных скачков.

Источники и литература

1) Апарин А. А., Попов Г. А., Яровая Е. Б. О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, № 4. С. 657–675.
2) Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. М.: Наука, 1976.
3) Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge University Press, 1987.
4) Foss S., Korshunov D., Zachary S. An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions. Springer, 2013.
5) Jensen A. Markoff chains as an aid in the study of Markoff processes // Scandinavian Actuarial Journal. 1953. Vol. 1. P. 87–91.
6) van Dijk N. M., van Brummelen S. P. J., Boucherie R. J. Uniformization: Basics, Extensions and Applications // Performance Evaluation of Complex Systems: Techniques and Tools. Springer, 2002. P. 35–63.