Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

О структуре решения мартингальной транспортной задачи с моментными ограничениями

Научный руководитель – Гущин Александр Александрович

Новикова Александра Валерьевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: alexandranovikova-98@yandex.ru

Задача оптимального транспорта, восходящая к классическим работам Монжа и Канторовича, в последние десятилетия получила широкое развитие в различных направлениях: от теоретического интереса к модифицированным постановкам до приложений в финансах и машинном обучении. Одной такой модификацией является мартингальный оптимальный транспорт с моментными ограничениями, где вместо фиксации маргинальных распределений задаются дополнительные условия на интегралы от некоторых функций. Данная постановка естественно возникает в задачах калибровки финансовых моделей, когда известны рыночные цены опционов, однако полная информация о распределении цены базового актива отсутствует.

Данная работа является продолжением исследования решений задачи слабого мартингального оптимального транспорта в условиях моментных ограничений:

$$\int \mathcal{W}_2(\pi^x, \gamma)^2 \mu(dx) \to \inf_S, \tag{1}$$

$$S = \left\{ \pi \in \Pi_{\mathcal{M}}(\mu) : \int f_i(y)\, \pi(dx, dy) = c_i,\ i = \overline{1, N} \right\}, \tag{2}$$

где $\mathcal{W}_2$ – метрика Канторовича, γ – некоторая заданная, референсная, мера, $\{\pi^x\}_x$ – семейство условных переходных мер с фиксированными начальными координатами, $\Pi_{\mathcal{M}}(\mu)$ – пространство вероятностных мартингальных мер на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с первым маргиналом μ, f_i – некоторые функции, в частности, функции выплат по простому опциону на покупку по цене K_i: $f_i(y) = (y - K_i)^+$. Мотивацией к рассмотрению данной постановки послужила работа [1], в которой референсная мера γ является гауссовской и второй маргинал ν известен, чего обычно не происходит в реальности.

Ранее нами была получена структура решения упрощённой задачи: $\mu = \delta_0$, а вместо гауссовской γ рассмотрена равномерная мера на отрезке, количество моментных ограничений $N = 1$. Текущий результат является обобщением предыдущих изысканий: доказано, что для произвольной референсной меры и произвольного количества ограничений структура решения задачи (1) является кусочно-сдвиговой.

Источники и литература

1) J. Backhoff-Veraguas, M. Beiglböck, M. Huesmann, S. Källblad. Martingale Benamou-Brenier: A probabilistic perspective, *The Annals of Probability, Vol. 48, pp. 2258-2289*, 2020

2) J.M. Borwein, A.S. Lewis. Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples, *Springer, New York*, 2006