

## Некоторые примеры неоднородных цепей Маркова с явным видом абсолютных вероятностей по Колмогорову

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

*Коновалов Глеб Сергеевич*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия  
*E-mail: gleb.konovarov@math.msu.ru*

В своей знаменитой статье 1936 года [3] А.Н. Колмогоров ввел понятие абсолютных вероятностей, которое имело большое значение для последующего развития теории неоднородных по времени цепей Маркова [2, 4, 5] и по настоящий день остается востребованным при анализе асимптотического поведения моделей согласования с переменной топологией [1] и марковских процессов принятия решений [6].

Колмогоров поставил вопрос: можно ли быть уверенным в том, что для заданного семейства условных вероятностей

$$\left( \left( P_{i,j}(t, s) \right)_{i,j \in E}, \quad -\infty < t \leq s < +\infty \right),$$

удовлетворяющих естественным условиям, цепь Маркова со значениями в дискретном множестве  $E$ ,  $|E| = N$  существует как процесс на всей временной оси. Вопрос имеет простой ответ для любой полупрямой  $t \in [t_0, +\infty)$ , но является не очевидным для  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Колмогоров показал, что ответ на этот вопрос положительный. Для этого он доказал теорему о существовании бесконечного семейства  $\{Q^*(t) = (Q_1^*(t), \dots, Q_N^*(t)), t \in \mathbb{R}\}$  вероятностных распределений на  $E$ , которые назвал абсолютными вероятностями. В случае дискретного времени определение можно записать так: семейство  $\{Q^*(t), t \in \mathbb{Z}\}$  называется последовательностью абсолютных вероятностей, если  $\forall t \in \mathbb{Z}$  выполнено:

$$Q^*(t+1) = Q^*(t)P(t),$$

где  $\{P(t), t \in \mathbb{Z}\}$  семейство стохастических матриц  $N \times N$  с элементами  $P_{i,j}(t) = P_{i,j}(t, t+1)$ .

Этот результат Колмогорова имел принципиальное значение, так как он показал потенциальную возможность применения марковских процессов для моделирования обратимых физических явлений.

Несмотря на длинную историю и важное теоретическое значение понятия абсолютных вероятностей число конкретных неоднородных цепей Маркова (НЦМ) с явным или почти явным видом абсолютных вероятностей очень мало. В данном докладе мы построим в явном виде несколько НЦМ и предложим подход, позволяющий находить большое число таких примеров в специальном классе НЦМ. Избегая громоздких формул, скажем лишь, что в упомянутом классе последовательности стохастических матриц  $\{P(t)\}$  имеют пределы  $P(\pm\infty)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , причем  $P(-\infty) \neq P(+\infty)$  выбираются в начале построения, а поведение получаемых при этом двусторонних последовательностей абсолютных вероятностей  $\{Q^*(t)\}$  можно исследовать явным образом. Таким образом, предлагаемый класс НЦМ значительно шире "самоочевидных" случаев постоянных или периодических последовательностей  $\{P(t)\}$ .

**Источники и литература**

- 1) Bolouki S. and Malhamé R. Consensus algorithms and the decomposition-separation theorem // Proc. IEEE 52nd Annu. CDC., 2013, P. 1490–1495.
- 2) Chatterjee S. and Seneta E. Towards consensus: some convergence theorems on repeated averaging // Journal of Applied Probability, 1977, P. 89–97.
- 3) Kolmogoroff A. Zur Theorie der Markoffschen Ketten // Math. Ann. 1936. Bd. 112. S. 155-160.
- 4) Sonin I. et al. The decomposition-separation theorem for finite nonhomogeneous Markov chains and related problems // Markov Processes and Related Topics: A Festschrift for Thomas G. Kurtz. Institute of Mathematical Statistics, 2008, P. 1–15.
- 5) Whiteley N., Lee A. Perfect sampling for nonhomogeneous Markov chains and hidden Markov models // The Annals of Applied Probability, 26(5), 3044-3077, (2016)
- 6) Mustafin, A., Colla, S., Olshevsky, A., Paschalidis I. Analysis of Value Iteration Through Absolute Probability Sequences // arxiv.org: <https://arxiv.org/abs/2502.03244>.