Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Применение обобщенных теорем Бертрана о выборах для нахождения вероятности разорения для одной модели риска в полумарковской среде.

Научный руководитель – Булинская Екатерина Вадимовна

Городнов Артем Михайлович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: amgorodnov@gmail.com

<p>Рассмотрим следующую модель риска. Пусть время $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ дискретно, $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – однородная марковская цепь с множеством состояний $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ и матрицей переходов $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in E}$, $p_{ij} = \mathbb{P}(J_k = j|J_{k-1} = i)$. Пусть $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – времена пребывания между переходами состояний, которые при $k \geq 2$ зависят только от текущего состояния J_{k-1} и следующего J_k и распределение которых задается функцией

$$G_{ij}(t) = \mathbb{P}(\tau_k = t|J_{k-1} = i, J_k = j), t \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Мы допускаем, что $\tau_1 \in \mathbb{N}$ может иметь распределение, отличное от $\{\tau_k\}_{k\geq 2}$ и интерпретироваться иначе. Пусть $T_0 = 0$, $T_{k+1} = T_k + \tau_{k+1}$ – время $k-$го скачка, $k \geq 0$. Определим величину $N(n) = \max\{k \geq 0 : T_k \leq n\}$, - количество скачков до момента n. Процесс $\{\xi_n = J_{N(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будет **полумарковским процессом**. Процесс риска X_n имеет вид:

$$X_n = x + n - S_n, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} C_k, \tag{2}$$

где $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность условно независимых неотрицательных целочисленных случайных величин с условным распределением: $\forall r \in \mathbb{N}$: $T_{k-1} < r \leq T_k$

$$\mathbb{P}(C_r = m, J_k = j|J_{k-1} = i) = \lambda_{ij}(m). \tag{3}$$

При фиксированных $J_{k-1} = i, J_k = j, \tau_k = t$ величины $C_{T_{k-1}+1}, \ldots, C_{T_k}$ независимы и одинаково распределены с законом $\widetilde{\lambda}_{ij}(m) = \mathbb{P}(C_r = m|J_{k-1} = i, J_k = j)$. В теории риска процесс $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ отражает прибыль страховой компании с начальным капиталом x, постоянной единичной скоростью поступления премий, целочисленными выплатами $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, которые зависят от состояний полумарковской цепи, то есть одинаково распределены в течение некоторого случайного периода. Рассмотрим случайный процесс $Y_n = (\xi_n, \eta_n, R_n) \in E \times E \times \mathbb{N}_0$, где $\xi_n = J_{N(n)}$ – текущее состояние полумарковского процесса, $\eta_n = J_{N(n)+1}$ – состояние после следующего скачка, R_n – время, прошедшее после скачка. В работе доказывается, что Y_n является **однородной неприводимой цепью Маркова** и имеет стационарное распределение α. Кроме того, если Y_n стартует из своего стационарного распределения, то $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является стационарной в узком смысле последовательностью. С помощью обобщенных теорем Бертрана [1] для стационарных мер находится условие чистой прибыли (по мере $\mathbb{P}_\alpha$), а также выводится явная формула для вероятности разорения за n шагов.
</p>

Источники и литература

1) O. Kallenberg, *Ballot Theorems and Sojourn Laws for Stationary Processes*, *The Annals of Probability* **27** (1999), no. 4, 2011–2019.