Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Асимптотическое поведение экстремальных значений в урновой схеме с обновлением шаров

Научный руководитель – Шкляев Александр Викторович

Васильев Ярослав Алексеевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и
случайных процессов, Москва, Россия
E-mail: iaroslav.vasilev@math.msu.ru

Введение. Представим себе автомат для выдачи таблеток (блистер), в котором одновременно находится фиксированное число таблеток. Периодически некоторая доля таблеток случайным образом извлекается, а на освободившееся место поступает новая. Каждая поступившая таблетка помечается номером текущего шага. В работе изучается случай, когда в каждый период времени обновлению подвергается ровно половина таблеток. Математическую модель такого процесса можно описать с помощью урновой схемы.

В работе изучается асимптотическое поведение двух характеристик этого процесса: самого старого номера, который ещё присутствует в урне, и самого нового номера, который в урне не встречается. Рассматривается случай, когда общее число шаров равно $2N$, где $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$, и стремится к бесконечности, а время t также велико. Получены предельные распределения для указанных экстремальных величин при некоторых соотношениях между t и n.

Математическая модель. В момент $t = 1$ в урне находится $2N$ шаров: N с номером 0 и N с номером 1. На каждом шаге $t \geq 2$ равновероятно выбирается N шаров (половина урны), они извлекаются, а вместо них добавляется N новых шаров с номером t. Таким образом, в момент t в урне находятся N шаров с номерами из $\{0, \dots, t-1\}$ и N шаров с номером t.

Введем случайные величины $\nu_k(t)$ $(k \leq t)$ – число шаров с номером k в момент t. Процесс $\{\nu_k(t)\}\forall k$ является марковским, вероятности переходов имеют гипергеометрическое распределение:

$$P(\nu_k(t+1) = m \mid \nu_k(t) = M) = \frac{C_M^m C_{2N-M}^{N-m}}{C_{2N}^N}.$$

Основные величины. Основной интерес представляют случайные величины, описывающие границы «фронта»:

$$\tilde{A}(t) = \min\{k \leq t : \nu_k(t) > 0\}, \qquad \tilde{F}(t) = \max\{k \leq t : \nu_k(t) = 0\},$$

где максимум пустого множества полагаем равным -1.

Отрезок $[\tilde{A}(t), \tilde{F}(t)]$ (если $\tilde{A}(t) < \tilde{F}(t)$) охватывает номера от самого старого из присутствующих до самого нового из отсутствующих — эту область мы будем называть фронтом. Случай $\tilde{A}(t) \geq \tilde{F}(t)$ соответствует пустому фронту.

Дальнейшие результаты будет удобнее формулировать для величин:

$$A(t) = t - \tilde{A}(t), \qquad F(t) = t - \tilde{F}(t).$$

Результаты.

Теорема 1. Пусть $N = 2^n$ и $t = n + 1$. Тогда при $n \to \infty$ для любого фиксированного натурального m

$$(\nu_1(t), \ldots, \nu_m(t)) \xrightarrow{d} (\Pi_1, \ldots, \Pi_m),$$

где $\Pi_i \sim \mathrm{Poisson}(2^{i-1})$ независимы.

Теорема 2 (о фронте частиц). Пусть $N = 2^n$, зафиксируем произвольные целые числа k, ℓ, не зависящие от n. Тогда при $t - n \to \infty$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(A(t) = n + k,\ F(t) = n + \ell\Big) = p_{k,\ell},$$

где

$$p_{k,\ell} = \begin{cases} e^{-2^{-k}} \displaystyle\prod_{i=0}^{\infty} \big(1 - e^{-2^{-k+i}}\big), & k = \ell - 1, \\ e^{-2^{2-k}} \big(1 - e^{-2^{2-k}}\big) e^{-2^{2-\ell}} \displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} \big(1 - e^{-2^{2-\ell+i}}\big), & k > \ell, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Основным инструментом доказательства является теорема Михайлова, изложенная в работе [1].

Источники и литература

1) Михайлов В.Г. Сходимость к процессу с независимыми приращениями в схеме нарастающих сумм зависимых случайных величин // Матем. сб. — 1974. — Т. 136, № 2. — С. 283–299.