Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Асимптотика вероятности грани выпуклой оболочки простого симметричного случайного блуждания на двумерной решетке

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Мыслюк Александр Олегович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: sanya.mysliuk@mail.ru

Асимптотические свойства выпуклых оболочек случайных множеств точек активно исследуются с 60-х годов 20 века. Как правило, работах рассматриваются случайные блуждания в $\mathbb{R}^d$ с дискретным или непрерывным временем. К работам с непрерывным временем можно отнести, например, [1], где исследуются выпуклые оболочки N броуновских движений на плоскости. В литературе не встречается работ по исследованию выпуклых оболочек на решетчатых пространствах. Несмотря на то, что случай блуждания в $\mathbb{Z}^d$ является частным случаем блуждания в $\mathbb{R}^d$, прямой перенос результатов из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{Z}^d$ не всегда возможен, так как, как правило, нарушаются основные необходимые требования, налагаемые на скачки Z_i. Некоторые результаты могут быть перенесены в $\mathbb{Z}^d$. Например, в работе [2] результаты для математического ожидания длины периметра и площади выпуклой оболочки формулируются в предположениях, позволяющих рассматривать решетчатый случай. Однако, многие геометрические характеристики выпуклой оболочки, опирающиеся на комбинаторные свойства последовательности скачков, не могут быть прямо перенесены. К таким характеристикам относится, например, число граней в границе выпуклой оболочки или асимптотика вероятности нахождения грани в границе, которая и исследуется в настоящей работе.

В докладе рассматривается простое симметричное случайное блуждание $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $S_0 := \mathbf{0}$ на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$. Скачки X_i независимы и одинаково распределены

$$\mathbb{P}(X_i = (1,0)) = \mathbb{P}(X_i = (-1,0)) = \mathbb{P}(X_i = (0,1)) = \mathbb{P}(X_i = (0,-1)) = \frac{1}{4}.$$

Через C_n обозначим выпуклую оболочку точек $S_0, \ldots, S_n$. Любая грань граничного выпуклого многоугольника ∂C_n соединяет некоторые две частичные суммы случайного блуждания S_{n_1} и S_{n_2}, $0 \le n_1 < n_2 \le n$. В данной работе выводится асимптотика вероятности $\mathbb{P}(S_{n_1}S_{n_2} \in \partial C_n)$ при фиксированных n_1, n_2 и $n \to \infty$.

Нам потребуется вспомогательный результат (теорема 1) для одномерного случайного блуждания, после чего будет сформулирован результат для вероятности грани (теорема 2).

Теорема 1. *Пусть k, m — два взаимно простых натуральных числа. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $S_0 :=$ $\mathbf{0}$, где одномерные скачки X_i независимы, одинаково распределены по закону:*

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \mathbb{P}(X_i = -k) = \mathbb{P}(X_i = m) = \mathbb{P}(X_i = -m) = \frac{1}{4}.$$

Через N_n обозначим число положительных частичных сумм среди $S_1, \ldots, S_n$ соответственно, через p_n обозначим $\mathbb{P}(N_n = n)$. Тогда существует константа $C_{k,m}$, что

$$p_n \sim \frac{C_{k,m}}{\sqrt{\pi n}},\ n \to \infty,$$

где $A_n \sim B_n$, $n \to \infty$ *означает, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = 1$. *Причем*

$$C_{k,m} = \exp\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{1}{2}(\cos k\theta + \cos m\theta)\right)d\theta\right).$$

Теорема 2. *Пусть* n_1, n_2 *– некоторые фиксированные моменты времени* $0 \le n_1 < n_2 \le n$. *Тогда существует такая* $C_{n_1,n_2} > 0$, *что*

$$\mathbb{P}(S_{n_1}S_{n_2} \in \partial C_n) \sim \frac{C_{n_1,n_2}}{\sqrt{n}},\ n \to \infty.$$

Источники и литература

1) Randon-Furling J., Majumdar S. N., Comtet A. Convex hull of N planar Brownian motions: exact results and an application to ecology // Physical review letters. 2009. **103** № 14
2) McRedmond J., Wade A. R. The convex hull of a planar random walk: perimeter, diameter, and shape //Electronic journal of probability. 2018. **131**. 1-24.
3) Andersen E. S. On the fluctuations of sums of random variables II // Mathematica Scandinavica. 1954. **2**. 195-223.