Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Интегро-дифференциальные уравнения в задачах о разорении для аннуитетных моделей с инвестированием

Научный руководитель – Кабанов Юрий Михайлович

Промыслов Платон Валерьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: platon.promyslov@gmail.com

В теории коллективного риска динамика капитала компании традиционно рассматривается без учета инвестиционного дохода. Однако в современных экономических реалиях критически важным является хеджирование инфляционных рисков посредством размещения резервов в рисковые активы. В настоящем докладе исследуется динамика капитала пенсионного фонда (или венчурной компании) в рамках обобщенной модели Крамера–Лундберга с аннуитетными платежами. В этой модели капитал непрерывно уменьшается из-за постоянных выплат клиентам и скачкообразно увеличивается за счет поступлений.

Предполагается, что компания придерживается стратегии постоянной пропорции: доля капитала $\kappa \in (0, 1]$ непрерывно инвестируется в рисковый актив, цена которого следует геометрическому броуновскому движению, а оставшаяся часть размещается на безрисковом банковском счете. Эволюция капитала $X = (X_t)_{t\geq 0}$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dX_t = (a_\kappa X_t - c)dt + \sigma_\kappa X_t dW_t + dP_t, \quad X_0 = u \geq 0, \tag{1}$$

где a_κ и σ_κ — эффективные параметры сноса и волатильности инвестиционного портфеля, $c > 0$ — интенсивность выплат, W_t — стандартное броуновское движение, а $P_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ — сложный пуассоновский процесс со строго положительными скачками ξ_i (функция распределения F, $F(0) = 0$), моделирующий входящие платежи.

Основным объектом исследования является вероятность неразорения (выживания) на бесконечном временном горизонте $\Phi(u) = \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} X_t > 0 \mid X_0 = u)$.

Традиционный мартингальный подход связывает функцию $\Phi(u)$ с решением сингулярного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) второго порядка:

$$\frac{1}{2}\sigma_\kappa^2 u^2 \Phi''(u) + (a_\kappa u - c)\Phi'(u) - \lambda\Phi(u) + \lambda \int_0^\infty \Phi(u + y)dF(y) = 0. \tag{2}$$

Формальный вывод данного уравнения с помощью формулы Ито требует априорного предположения о том, что искомая вероятность дважды непрерывно дифференцируема, то есть $\Phi \in C^2$. В докладе предлагается метод преодоления этой аналитической трудности при минимальных требованиях к распределению скачков (достаточно лишь существования первого момента $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$).

Более того, при довольно слабых предположениях можно показать, что для вероятности разорения $\Psi(u) = 1 - \Phi(u)$ существует константа $C > 0$ такая, что:

$$\Psi(u) \sim Cu^{-\gamma+1}, \quad \text{при } u \to \infty, \tag{3}$$

где $\gamma = 2a_\kappa/\sigma_\kappa^2 > 1$.

Источники и литература

1) Promyslov, P.: On the integro-differential equation arising in the ruin problem for annuity payment models. arXiv:2601.01447v1 [math.PR] (2026)