

Исследование возвратности случайного блуждания на полубесконечной полосе высоты k и четверти плоскости с помощью метода электрических сетей.

Научный руководитель – Замятин Андрей Андреевич

Белоножка Елена Андреевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: belonozhkaelena@gmail.com

Случайные блуждания на графах тесно связаны с электрическими сетями. Фундаментальный результат теории состоит в том, что напряжение в узле сети при фиксированных потенциалах на границе совпадает с вероятностью достичь одной границы раньше другой для соответствующего случайного блуждания. Эффективное сопротивление между двумя узлами допускает вариационную характеристику (принцип Томсона) и позволяет судить о возвратности или транзиентности блуждания на бесконечном графе. В работе исследуются случайные блуждания на полосах конечной высоты и на четверти плоскости с неоднородными проводимостями, экспоненциально зависящими от координат. Основная цель – определить условия на параметр ρ , при которых блуждание является возвратным или транзиентным.

Пусть $G = (V, E)$ - связный взвешенный граф, ребрам которого сопоставлены положительные веса $\{c_{xy}\}_{(x,y) \in E}$. Введем случайное блуждание. Определим пространство состояний $X_n = \{x : x \in V\}$ - вершины графа и переходные вероятности: $P(X_n = y | X_{n-1} = x) = p_{xy} = c_{xy}/\pi_x$, где $\pi_x = \sum_{y \sim x} c_{xy}$.

Рассмотрим две модели:

1) Полубесконечная полоса высоты k . $G = \mathbf{Z}^+ \times \{0, \dots, k\}$ с горизонтальными и вертикальными ребрами, которым сопоставлены веса

$$c_{((i,j),(i+1,j))} = C_{2j+1}\rho^i, c_{((i,j),(i,j+1))} = C_{2(j+1)}\rho^i$$

2) Четверть плоскости. $G = \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ с горизонтальными и вертикальными ребрами, которым сопоставлены веса

$$c_{((i,j),(i+1,j))} = C_1\rho^{i+j}, c_{((i,j),(i,j+1))} = C_2\rho^{i+j}$$

Теорема 1. *В моделях 1) и 2) при $\rho \leq 1$ блуждание возвратно, при $\rho > 1$ транзиентно.*

Доказательство приведено с использованием методов электрических сетей [1,2]. Веса c_{xy} интерпретируются как величины, обратные сопротивлениям рёбер. Возвратность блуждания эквивалентна бесконечности эффективного сопротивления от стартовой вершины до бесконечности. Для анализа бесконечных графов эффективное сопротивление до бесконечности определяется как предел эффективных сопротивлений между источником тока и вершиной, стягивающей внешность конечных подграфов исчерпывающей последовательности. Эффективное сопротивление оценивается с помощью склейки вершин (при $\rho \leq 1$) и удаления рёбер (при $\rho > 1$), что позволяет использовать законы последовательного и параллельного соединения.

Источники и литература

- 1) Doyle P.G., Snell J.L. Random walks and electric networks. Mathematical Association of America, 1984.
- 2) Nachmias A. Planar Maps, Random Walks and Circle Packing. Cham: Springer, 2020.