

Условия вырождения для двуполого ветвящегося процесса со случайным спариванием и пересекающимися поколениями

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Гордеев Никита Валерьевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: nikita.gordeev@math.msu.ru

В теории ветвящихся процессов важное место занимают модели, описывающие эволюцию биологических популяций с половой структурой. Классические двуполые ветвящиеся процессы (ДВП) предполагают смену непересекающихся поколений и смерть в определённом фиксированном возрасте для всех особей. Однако для многих биологических видов характерны "пересечение" поколений, то есть возможность образования пар из особей различных поколений, и зависимость выживаемости от текущего состояния популяции, то есть половозрастной структуры X_n . В [1] был предложен ДВП со случайным спариванием и пересекающимися поколениями, где особи достигают максимального возраста $a \geq 1$ и удаляются из популяции. Мы обобщаем эту модель на класс, когда выживаемость особи зависит от пола, возраста и численности популяции X_n . Цель работы — исследовать условия вырождения популяции в описанном классе. Приведём формальное описание модели $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$X_n := (F_n^{(1)}, \dots, F_n^{(a)}, M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(a)})$$

— вектор численностей самок и самцов по возрастам $h = 1, \dots, a$. Эволюция задается уравнениями:

$$(F_{n+1}^{(1)}, M_{n+1}^{(1)}) = \sum_{h=1}^a \sum_{i=1}^{F_n^{(h)}} \delta_{n,i}^{(h)}(X_n) \xi_{n+1,i}^{(h)}(X_n),$$

$$(F_{n+1}^{(h+1)}, M_{n+1}^{(h+1)}) = \left(\sum_{i=1}^{F_n^{(h)}} \phi_{n,i}^{(h)}(X_n), \sum_{i=1}^{M_n^{(h)}} \mu_{n,i}^{(h)}(X_n) \right), \quad h = 1, \dots, a-1.$$

Здесь $\delta_{n,i}^{(h)}$ — индикатор спаривания (с вероятностью $p(X_n)$), $\xi_{n+1,i}^{(h)}$ — число потомков, $\phi_{n,i}^{(h)}$ и $\mu_{n,i}^{(h)}$ — индикаторы выживания самок и самцов с вероятностями $p_f^{(h)}(X_n)$ и $p_m^{(h)}(X_n)$ соответственно. Нами доказано, что нулевое состояние является поглощающим, а ненулевые состояния транзиентны (в которые процесс возвращается конечное число раз) при естественных условиях невырожденности. Установлена дихотомия: популяция либо вымирает, либо неограниченно растет с вероятностью 1. Главный результат — теорема о достаточном условии вымирания:

Теорема 1. *Если выполнено неравенство*

$$\sum_{h=1}^a R_h \cdot \left(\prod_{j=1}^{h-1} S_j \right) < 1,$$

где $R_h := \sup_x p(x) \varepsilon_f^{(h)}(x)$ — максимальное ожидаемое число дочерей от самок возраста h , $S_h := \sup_x p_f^{(h)}(x)$ — максимальная вероятность дожить до возраста $h+1$, то популяция вымирает с вероятностью 1. (Произведение в сумме при $h=1$ считается равным 1)

Доказательство использует переход к процессу только по одному типу частиц, способному к воспроизведению потомства, мажорирование его ветвящимся процессом с постоянными параметрами и применение техники супермартингалов.

Источники и литература

- 1) M. Molina and M. Mota, Two-Sex Branching Processes with Overlapping Generations, *Stochastics and Quality Control* 2024; 39(1): 41–49.
- 2) M. Molina, M. Mota and A. Ramos, Bisexual Galton–Watson branching process in varying environments, *Stoch. Anal. Appl.* 21 (2003), no. 6, 1353–1367.
- 3) D. J. Daley, Extinction conditions for certain bisexual Galton–Watson branching processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* 9 (1968), 315–322.
- 4) W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (1968).
- 5) Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*.