

**Оценка погрешности при аппроксимации системы с разделением времени  
системой с непрерывным временем**

**Научный руководитель – Фалин Геннадий Иванович**

**Герашченко Никита Игоревич**

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия  
*E-mail: nikita.gerashchenko2002@gmail.com*

В теории массового обслуживания для анализа дискретных систем с разделением времени часто применяется аппроксимация непрерывными моделями с разделением процессора [3]. Основная трудность анализа дискретных моделей обусловлена множественными поступлениями заявок за один такт. Возникает важная задача строгой оценки погрешности такой аппроксимации и определения ее порядка [5]. В данной работе исследуется дискретная марковская цепь, описывающая общее число сегментов в системе. Динамика цепи задается рекуррентным соотношением:

$$\xi_{t+1} = (\xi_t - 1)^+ + \sum_{n=1}^{\nu_t} \alpha_{tn}$$

где  $\nu_t$  — пуассоновская случайная величина с параметром  $\rho = \lambda\Delta$ , а  $\alpha_{tn}$  — размеры поступивших сообщений. Для данной цепи проведен строгий вывод производящей функции стационарного распределения:

$$\Pi(z) = \frac{(1-z)(1-\rho E(B))}{1-z-\rho z + \rho z B(z)}$$

Непрерывная аппроксимация строится с помощью метода дополнительной переменной [1]. Динамика вложенной цепи эквивалентна следующей рекурсии:

$$\xi'_{t+1} = (\xi'_t - \epsilon_t)^+ + (1 - \epsilon_t)\alpha_{t1}$$

где  $\epsilon_t$  — бернуллиевская случайная величина. Производящая функция стационарного распределения аппроксимирующей системы принимает вид:

$$\pi(z) = (1 - \rho E(B)) \frac{z - 1}{z - 1 + \rho z(1 - B(z))}$$

Ключевым результатом работы является аналитическая оценка погрешности  $D(f)$  для произвольной характеристики  $f$ , удовлетворяющей условию  $|f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i| \leq C$ . Используя методы стохастического упорядочивания [2], показано, что для вспомогательной цепи  $\xi''_t$ , доминирующей обе рассматриваемые модели, выполняется неравенство хвостовых распределений. На основе этого получена итоговая граница погрешности:

$$|D(f)| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\pi}_n + \bar{\pi}'_n - 2\bar{\pi}''_n) = C(V + V' - 2V'')$$

Для компоненты  $V$  (и аналогично для других сумм) в работе выведено точное аналитическое представление через моменты  $a_k$  распределения числа пакетов, прибывающих за

один такт. Полученные аналитические выражения создают строгую математическую основу для использования моделей с процессорным разделением в качестве непрерывных аппроксимаций [4]. Полученные оценки имеют более высокий порядок  $O(\Delta^2)$  и корректно отражают асимптотическое поведение характеристик системы при малых значениях длины такта обслуживания.

#### Источники и литература

- 1) Джейсуол Н. Очереди с приоритетами, пер. с англ. И. С. Нефедовой и В. С. Манусевича; под ред. В. В. Калашникова, М.: Мир (1973)
- 2) Falin G. An error bound for a continuous time approximation of a time-sharing queue, Stochastic Models (1995)
- 3) Kleinrock L. Time-shared systems: A theoretical treatment, Journal of the ACM, 14(2), 242–261 (1967)
- 4) Templeton J.G.C., Falin G.I. Retrial Queues (1st ed.). Routledge (1997)
- 5) van Dijk N. M., Taylor P. G. An error bound for a continuous time approximation of discrete time servicing, Stochastic Models (1992)