Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Об одной задаче диверсификации в случае копулы с кубическими сечениями

Научный руководитель – Лебедев Алексей Викторович

Чернощёкова Алина Фёдоровна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: alina.chernoshchekova@math.msu.ru

Работа посвящена исследованию задачи оптимального распределения капитала между двумя рисковыми активами с целью минимизации риска.
Когерентной мерой риска ([1]) называется невозрастающий субаддитивный положительно однородный функционал $\rho : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$, инвариантный относительно сдвига на константу. Для когерентной меры риска

$$\rho_{p,a}(\xi) = -\mathbb{E}\xi + a\left\|(\xi - \mathbb{E}\xi)^-\right\|_p,$$

впервые рассмотренной в [2], если доходности активов являются симметрично распределёнными с нулевым средним, то её минимизацию можно свести к минимизации абсолютного момента $\mathbb{E}|\xi|^n$ (рассматривается лишь случай $n = 2k$) доходности портфеля

$$\xi = \frac{w_1}{\lambda_1}\xi_1 + \frac{w_2}{\lambda_2}\xi_2, \quad w_1, w_2 \geqslant 0, w_1 + w_2 = 1.$$

Параметры $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ определяют масштаб распределений; ввиду однородности задачи оптимальные веса зависят только от отношения $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, поэтому можем положить $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$.

Рассматривается задача диверсификации для модели зависимости активов со стандартными лапласовскими случайными величинами, имеющими совместную функцию распределения $F(x, y) = C_{a,b}(F(x), F(y))$, где $F(x)$ — функция стандартного распределения Лапласа, а $C_{a,b}(u, v) = uv + uv(1 - u)(1 - v)(a + b(1 - 2u)(1 - 2v))$ — копула с кубическими сечениями. Параметры a и b здесь такие, что $F(x, y)$ — действительно функция распределения. Такая зависимость активов была рассмотрена в [3], но относительно другой когерентной меры риска.

Для этой модели выведено условие вырождения диверсификации при всех n, т.е. найдено, при каких значениях параметров λ, a и b оптимальные веса будут равны нулю и единице соответственно. Для $n = 4$ и $n = 6$ данная область построена в пространстве (λ, a, b). Кроме того, показано, что при

$$\frac{3\sqrt{3}}{4n} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n} < \lambda < \frac{4n}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2^n}{2^n - 1}$$

не существует параметров a, b, удовлетворяющих этим условиям, то есть диверсификация всегда эффективна (оптимальные веса находятся строго внутри интервала).

Источники и литература

1) Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk // Mathematical Finance. 1999. **9**. 203–228.
2) Fischer T. Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments // Insurance: Mathematics and Economics. 2003. **32**, N 1. 135–146.
3) Карнаухова А.В. Исследование влияния неклассической зависимости данных на оценку риска, основанную на минимумах. Дипломная работа, МГУ, 2012.