

## О теореме об эквивалентных условиях сходимости целевой функции

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

*Богданова Ирина Дмитриевна**Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
 Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия  
*E-mail: irina.bogdanova@math.msu.ru*

При анализе данных одной из наиболее распространенных проблем является наличие пропущенных значений [1]. Причины могут быть разнообразны и включают, например, ошибки при сборе информации, сбой оборудования и отказы респондентов отвечать на некоторые вопросы при анкетировании. Берцимас, Павловский и Чжуо предложили подход к восстановлению пропущенных данных, основанный на оптимизации [2]. Метод, описанный в [3], минимизирует расстояние Махаланобиса каждого неполного наблюдения от общего среднего. **Целью** данной работы является доказательство теоремы, описывающей поведение целевой функции, которая вводится для восстановления пропущенных данных. Перейдем к формальной постановке задачи. Пусть  $w_j$  — вектор признаков,  $\mu$  — вектор средних,  $\Sigma$  — ковариационная матрица. Тогда квадрат расстояния Махаланобиса имеет вид:

$$M_j(w_j, \mu, \Sigma) := (w_j - \mu)^\top \Sigma^{-1} (w_j - \mu).$$

Общая минимизируемая функция представляет собой сумму таких расстояний по всем неполным наблюдениям:

$$F(W, \mu, \Sigma) := \sum_{j \in J} M_j(w_j, \mu, \Sigma), \quad W = \{w_j\}_{j \in J} \in \mathbb{R}^{p \times |J|},$$

где  $J$  — множество индексов пропусков,  $|\cdot|$  — мощность множества,  $W$  — матрица восстановленных данных.

Зафиксировав параметры распределения  $\theta = (\mu, \Sigma)$ , определим функцию задачи оптимизации:

$$\phi(\theta) := \min_{W \in \mathbb{R}^{p \times |J|}} F(W, \theta).$$

Тогда значение целевой функции на текущей итерации алгоритма можно записать как:

$$f^t := \phi(\theta^t).$$

Основным результатом является:

**Теорема 1.**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^t = f^* \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \theta^t = \theta^*, \quad \theta^t = (\mu^t, A^t); \quad A^t := (\Sigma^{-1})^t.$$

**Источники и литература**

- 1) Alwateer M., Atlam E., El-Raouf M., Ghoneim O., Gad I. Missing data imputation: A comprehensive review // Journal of Computer and Communications. 2024. Vol. 12. P. 53–75.
- 2) Bertsimas D., Pawlowski C., Zhuo Y.D. From predictive methods to missing data imputation: An optimization approach // Journal of Machine Learning Research. 2018. Vol. 18, No. 1. P. 1–39.
- 3) Labita G.J.D., Tubo B.F. Multivariate imputation by Mahalanobis distance optimization // Reliability: Theory & Applications. 2025. Vol. 20, No. 2. P. 632–641.