Секция «19.13 Теоретическая механика и мехатроника»

Применение метода М. Эно для поиска периодических траекторий в окрестности равномерно вращающегося малого небесного тела

Научный руководитель – Шатина Альбина Викторовна

Коренев Михаил Дмитриевич
Студент (бакалавр)
МИРЭА - Российский технологический университет, Институт искусственного интеллекта, Москва, Россия
E-mail: kolekt84@gmail.com

Краткое изложение работы

Задача трёх тел является одной из центральных задач небесной механики. В общем случае она неинтегрируема, поэтому особую роль играют периодические решения, которые образуют “скелет” фазового пространства и позволяют описывать структуру движения. В данной работе рассматривается плоская круговая ограниченная задача трёх тел и численный поиск семейств симметричных периодических орбит.

Исследуется движение тела пренебрежимо малой массы в поле двух основных тел с массами $1 - \mu$ и μ, движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. В безразмерной вращающейся системе координат уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

где

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2}.$$

Система обладает интегралом Якоби

$$C = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

который задаёт энергетический уровень и ограничивает области возможного движения.

Для поиска симметричных периодических орбит используется инвариантность системы относительно преобразования

$$(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mapsto (-t, x, -y, -\dot{x}, \dot{y}).$$

Благодаря этой симметрии орбита является периодической, если, начавшись на оси Ox при $y = 0$, $\dot{x} = 0$, она вторично пересекает эту ось перпендикулярно. Поэтому поиск периодических решений сводится к подбору начальных условий вида

$$x = x_0, \qquad y = 0, \qquad \dot{x} = 0, \qquad \dot{y} = \dot{y}_0(x_0, C),$$

при которых в момент полупериода выполняется условие

$$y(T/2) = 0, \qquad \dot{x}(T/2) = 0.$$

Численный поиск проводился методом сканирования плоскости параметров (x, C). Для каждого узла сетки начальная скорость вычислялась из интеграла Якоби, после чего система интегрировалась методом Рунге–Кутты с адаптивным шагом. Условие периодичности проверялось по следующему пересечению оси Ox; уточнение момента пересечения выполнялось методом Ньютона, а локализация нулей функции невязки — методом бисекции. Для ускорения построения глобальных карт использовались параллельные вычисления.

Построены диаграммы характеристических кривых семейств симметричных периодических орбит для двух значений параметра массы: $\mu = 0.5$ (Копенгагенская задача) и $\mu = 0.01215$ (система Земля–Луна). Полученные результаты воспроизводят известную структуру семейств периодических орбит: выделяются орбиты, охватывающие одно из основных тел, а также орбиты, охватывающие оба тела. Для системы Земля–Луна показано, что из-за отсутствия симметрии относительно оси Oy диаграмма приобретает более сложную топологию, однако предложенный алгоритм сохраняет работоспособность.

Для анализа окрестностей найденных периодических решений применён метод сечений Пуанкаре. На фиксированном уровне постоянной Якоби были построены фазовые портреты в сечении $y = 0$, $\dot{y} > 0$. Показано, что устойчивой периодической орбите соответствует неподвижная точка, окружённая замкнутыми инвариантными кривыми, отвечающими квазипериодическим движениям. По структуре “островов устойчивости” удалось обнаружить более сложное периодическое движение, связанное с найденным базовым семейством.

Таким образом, в работе реализован и апробирован численный подход к построению семейств симметричных периодических орбит в плоской круговой ограниченной задаче трёх тел. Построены глобальные характеристические диаграммы, получены примеры орбит для модельной задачи равных масс и для системы Земля–Луна, а также продемонстрирована возможность поиска более сложных периодических решений с помощью сечений Пуанкаре. Развитая методика может быть использована в дальнейшем для исследования движения в более сложных гравитационных полях, в частности в задаче о движении аппарата вблизи равномерно вращающегося астероида.

Иллюстрации

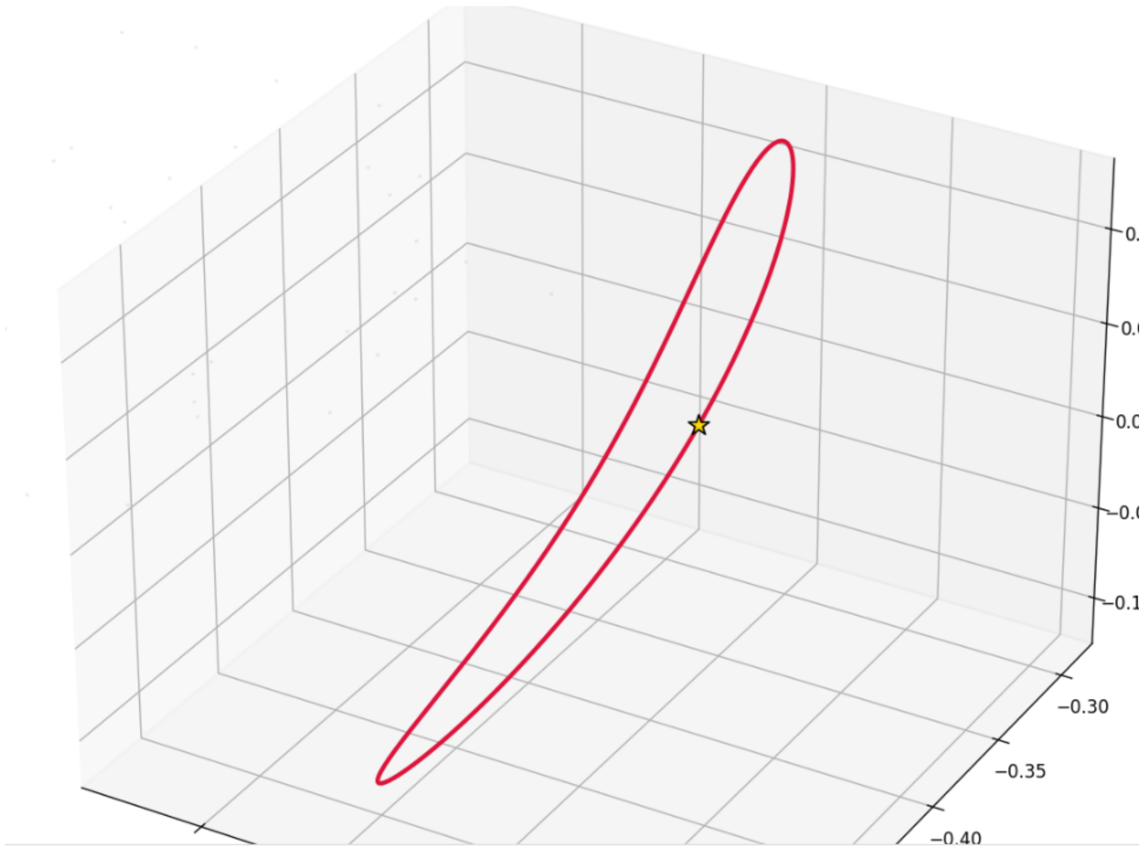

Рис. : Замкнутая орбита возле точки либрации астероида

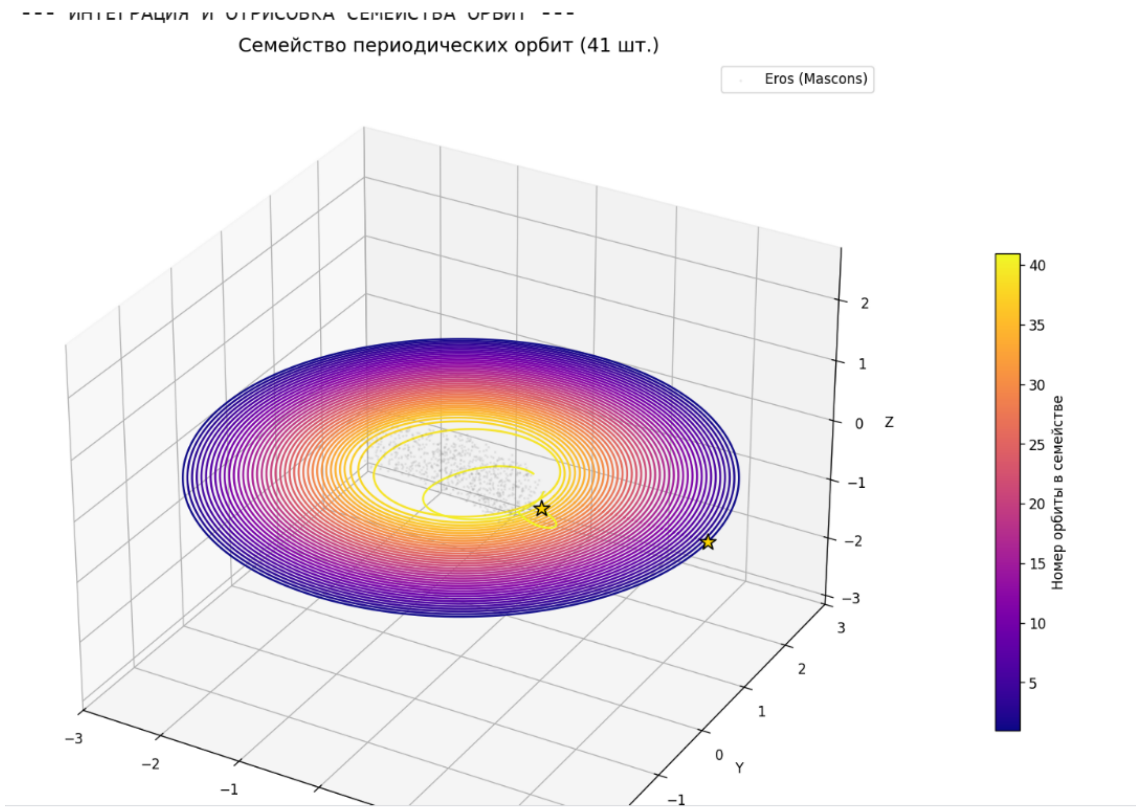

Рис. : Семейство замкнутых орбит вокруг астероида

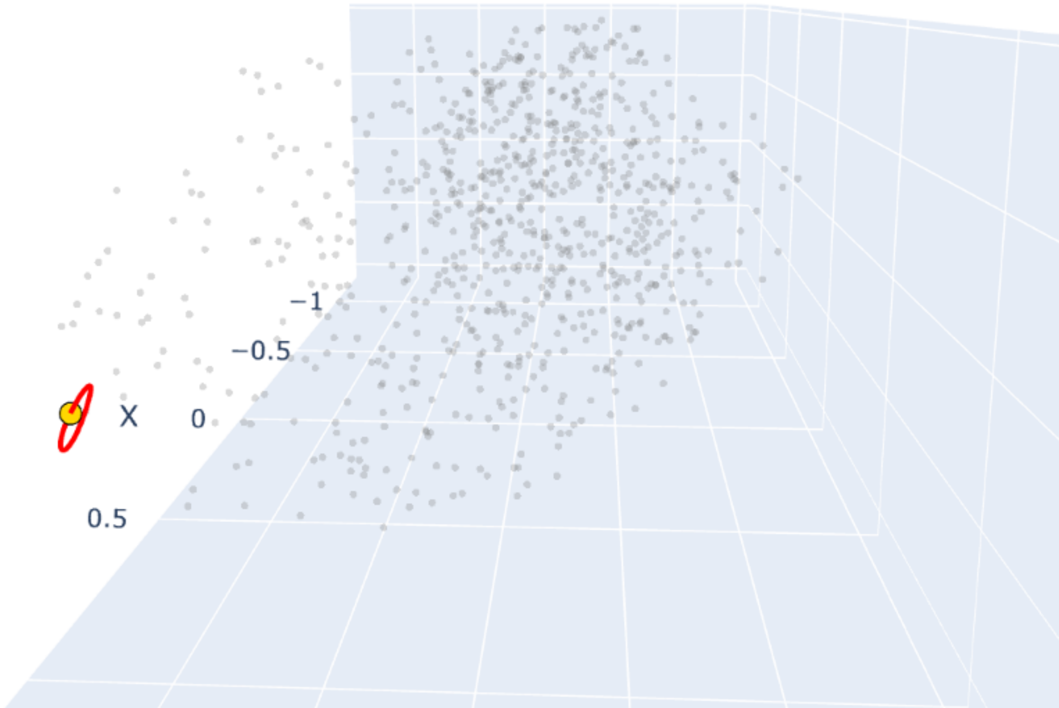

Рис. : Замкнутая орбита возле точки либрации астероида далеко

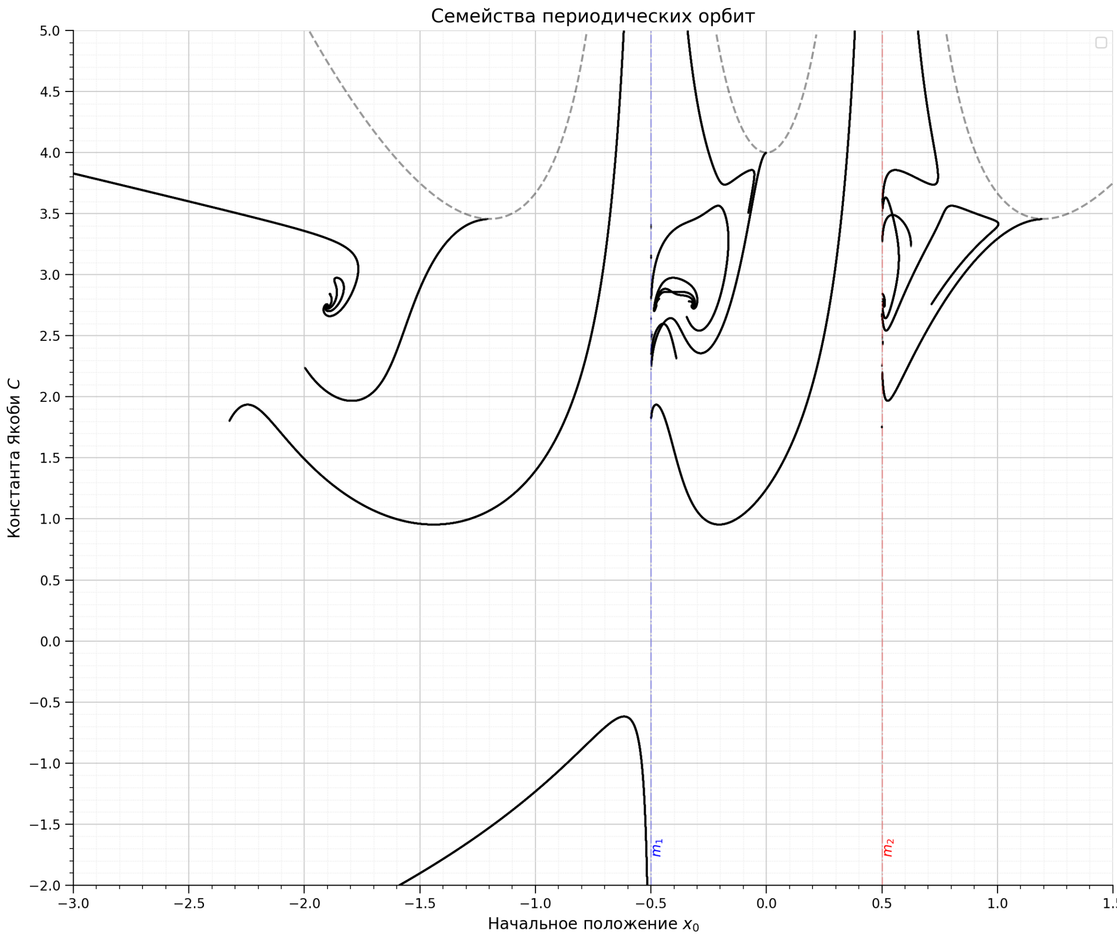

Рис. : Диаграмма X_C

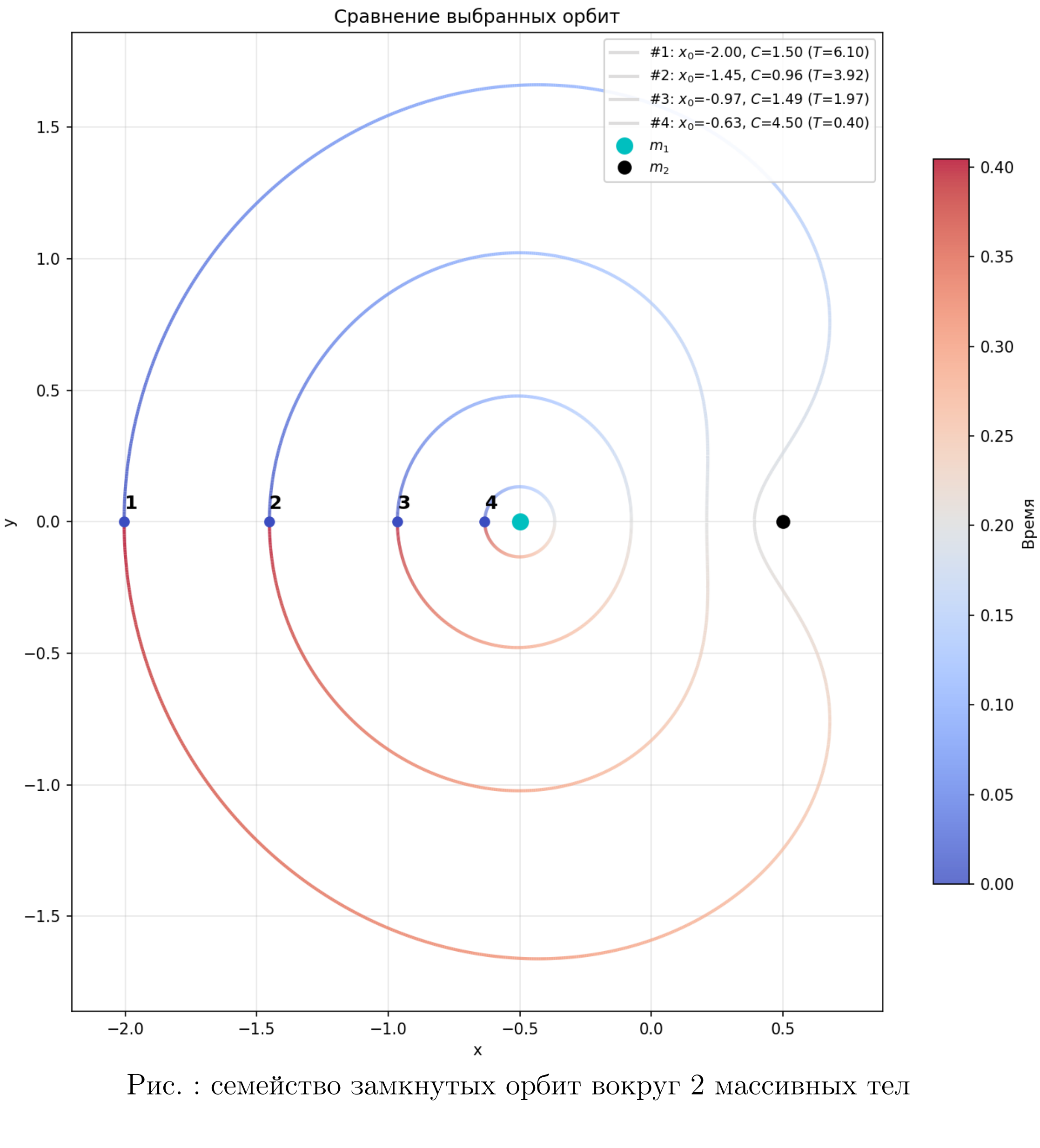

Рис. : семейство замкнутых орбит вокруг 2 массивных тел