# Использование физически информированных нейронных сетей для идентификации материальных параметров в задаче теории упругости

**Научный руководитель – Романов Александр Вячеславович**

***Шелепов Павел Игоревич***
*Студент (специалист)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра механики композитов, Москва, Россия
*E-mail: pavel.shelepov@math.msu.ru*

Рассматривается задача идентификации параметров материала по доступным измерениям перемещений в линейной упругости.
Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Для неизвестных параметров $\theta = (E, \nu)$ требуется восстановить поле перемещений $\mathbf{u}(x)$ и определить $\theta$ по данным $D = \{(\mathbf{x}_j, \tilde{\mathbf{u}}(x_j))\}_{j=1}^{N_{\text{data}}}$.
Прямая задача задаётся уравнениями [3]

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{P}(\mathbf{u}, \theta) + \mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0$$

$$\underset{\sim}{P}(\mathbf{u}, \theta) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = \mathbf{S}$$

Где [2] $\underset{\sim}{P} = \underset{\approx}{C_\theta} : \underset{\sim}{\varepsilon}(\mathbf{u}),\ \underset{\sim}{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$.

При предположении, что шум измерений является Гауссовым, задача эквивалентна минимизации квадратичной невязки по данным при выполнении механических ограничений. Предлагается решение на основе коллокационных физически информированных нейронных сетей [6]: поле аппроксимируется нейросетью $\mathbf{u}_w(x) = NN(\mathbf{x}; \mathbf{w})$, а ограничения вводятся методом штрафов [1].
Итоговая задача оптимизации (функция потерь [4]) имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{w}, \theta) = \rho_{\text{data}} \frac{1}{N_{\text{data}}} \sum_j \|\mathbf{u}_w(\mathbf{x}_j) - \tilde{\mathbf{u}}_j\|^2 + \\ \rho_\Omega \frac{1}{N_\Omega} \sum_{x_i \in X_\Omega} \|\nabla \cdot \underset{\sim}{P}(\mathbf{u}_w(\mathbf{x}_i), \theta) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\|^2 + \\ + \rho_N \frac{1}{N_N} \sum_{x_i \in X_N} \|\underset{\sim}{P}(\mathbf{u}_w(\mathbf{x}_i), \theta) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{S}(\mathbf{x}_i)\|^2 + \\ + \rho_D \frac{1}{N_D} \sum_{x_i \in X_D} \|\mathbf{u}_w(\mathbf{x}_i)\|^2\end{aligned}$$

Суммы являются аппроксимациями интегральных норм невязок методом Монте-Карло, что устраняет необходимость построения сетки и позволяет обучать модель на произвольной геометрии.
Обучение [5] выполняется методом Adam с физическими ограничениями на $\theta$ Реализация ориентирована на пакет NVIDIA PhysicsNeMo, представляющий собой фреймворк для PINN-обучения [7].

### Источники и литература


1) Евтушенко Ю. Г. Численные методы решения задач нелинейного программирования, Журнал вычислительной математики и математической физики. 1976. Т. 16. № 2.
2) Победря, Георгиевский. Лекции по теория упругости. 1999
3) Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, М. Наука, 1975
4) C. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning., Springer, 2006
5) D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R.J. Williams. Learning representations by back-propagating errors, Nature, 1986
6) Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear PDEs. J. Comput. Phys., 2019.
7) NVIDIA. PhysicsNeMo Sym: Linear Elasticity. docs.nvidia.com/physicsnemo