

Циклические эндоморфизмы модулей

Научный руководитель – Маркова Ольга Викторовна

Колегов Никита Антонович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: na.kolegov@yandex.ru

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, M — правый R -модуль, $E = \text{End } M$ — кольцо эндоморфизмов. Тогда M обладает естественной структурой (E, R) -бимодуля. Эндоморфизм $\varphi \in E$ назовём *циклическим*, если существует такой элемент $m \in M$, что множество $\{\varphi^k(m)\}_{k=0}^{\infty}$ порождает M как R -модуль. Эндоморфизмы с таким свойством являются обобщением циклических матриц над полем, которые играют важную роль в различных задачах алгебры и комбинаторики [1, 2, 4]. Частным случаем циклической матрицы над полем является сопровождающая матрица некоторого многочлена. Сопровождающие матрицы над кольцами рассматривались в работах [3, 5].

В докладе будут представлены следующие результаты:

- Описание полупростых модулей, для которых существует циклический эндоморфизм.
- Критерии, когда эндоморфизмы специального вида (нильпотентные, идемпотентные, строго чистые) являются циклическими.
- Если кольцо R коммутативно и модуль M обладает циклическим эндоморфизмом, тогда M заведомо является циклическим модулем над своим кольцом эндоморфизмов E . Построен пример, показывающий, что обратное неверно.
- Для коммутативного кольца R и конечно-порождённого модуля M установлена связь циклических эндоморфизмов с минимальной системой образующих модуля. Найдены примеры колец, отличных от полей, над которыми все конечно порождённые модули обладают циклическими эндоморфизмами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-11-00348).

Источники и литература

- 1) L. Deaett, J. Fischer, C. Garnett, K.N. Vander Meulen. Non-sparse companion matrices. *Electron. J. Linear Algebra*, 2019, Vol. 35, pp. 223–247.
- 2) G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak. Extremal matrix centralizers. *Linear Algebra Appl.*, 2013, Vol. 438, pp. 2904–2910.
- 3) N.H. Guersenzvaig, F. Szechtman. Subalgebras of matrix algebras generated by companion matrices. *Linear Algebra Appl.*, 2010, Vol. 432, pp. 2691–2700.
- 4) A. Guterman, T. Laffey, O. Markova, H. Šmigoc. A resolution of Paz’s conjecture in the presence of a nonderogatory matrix. *Linear Algebra Appl.*, 2018, Vol. 543, pp. 234–250.
- 5) L.N. Vaserstein, E. Wheland. Commutators and companion matrices over rings of stable rank 1. *Linear Algebra Appl.*, 1990, Vol. 142, pp. 263–277.