Секция «19.10 Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О графах ортогональности алгебр Окубо

Научный руководитель – Жилина Светлана Александровна

Павлинов Данил Андреевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия

E-mail: danilissimus777@gmail.com

Алгебра Окубо была впервые определена С. Окубо в работе [4] для поля $\mathbb{C}$ на основе алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ комплексных 3×3 матриц с нулевым следом; там же была построена ее вещественная форма. Впоследствии было показано, что алгебры Окубо вместе с формами пара-гурвицевых алгебр исчерпывают класс симметрических композиционных алгебр, который активно изучался в работах [2], [3].

В последнее время особое внимание уделяется исследованию графов, определяемых бинарными отношениями на элементах алгебр; в частности, в работе [1] были рассмотрены графы ортогональности матричных колец. Целью данной работы является описание явного вида компонент связности графов ортогональности алгебр Окубо $\mathcal{O}$ и нахождение их диаметров.

Пусть $Z(\mathcal{A})$ — множество двусторонних делителей нуля алгебры $\mathcal{A}$. *Графом ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ называют граф, вершинами которого являются одномерные подпространства вида $[a]=\mathbb{F}a$, $a\in Z(\mathcal{A})$, причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены ребром, если $ab=ba=0$.

Ключевую роль в исследовании играет классификация элементов алгебры Окубо по значению кубической формы $n(x, x*x)$, где $n(\cdot)$ — норма на алгебре Окубо. Существование элемента x, для которого $n(x,x*x)=0$, возможно лишь в алгебрах Окубо, содержащих ненулевой идемпотент. Для произвольного $x\in Z(\mathcal{O})$ обозначим через $O_{\mathcal{O}}(x)$ множество элементов, ортогональных x. Основной результат представлен в следующей теореме:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{O}$ — алгебра Окубо с изотропной нормой над произвольным полем $\mathbb{F}$. Тогда граф ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{O})$ несвязен и является объединением своих связных подграфов, заданных следующими множествами вершин:*

(1) *множество*

$$V_x=\big\{[x],\,[x*x]\big\}$$

для каждого $x\in Z(\mathcal{O})$, удовлетворяющего условию $n(x,x*x)\neq 0$;

(2) *если $\mathcal{O}$ содержит ненулевой идемпотент,* $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 3$ *и $\omega\notin\mathbb{F}$, где ω — первообразный кубический корень из единицы, то множество*

$$V'_x=\big\{[y]\mid y\in O_{\mathcal{O}}(x)\big\}$$

для каждого элемента $x\in Z(\mathcal{O})$, удовлетворяющего условию $x*x=0$;

(3) *если $\mathcal{O}$ содержит ненулевой идемпотент,* $\operatorname{char}\mathbb{F}=3$ *или $\omega\in\mathbb{F}$, то множество*

$$V=\big\{[x]\mid x\in Z(\mathcal{O}),\ n(x,x*x)=0\big\}.$$

Диаметр компоненты связности, отвечающей множеству вершин V_x, равен 1, множеству V'_x — равен 2, а множеству V — равен 5, если $\mathcal{O}$ — расщепляемая алгебра Окубо, и 3 — иначе.

Доклад основан на работе [5].

Источники и литература

1) Б.Р. Бахадлы, А.Э. Гутерман, О.В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью.*, Зап. научн. семин. ПОМИ, 428: 49–80 (2014); Переведено в J. Math. Sci. (N. Y.), 207(5): 698-717 (2015).
2) A. Elduque, H. Ch. Myung, *Flexible composition algebras and Okubo algebras*, Communications in Algebra, 19(4): 1197–1227 (1991).
3) A. Elduque, H. Ch. Myung, *On flexible composition algebras*, Communications in Algebra, 21(7): 2481–2505 (1993).
4) S. Okubo, *Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras*, Hadronic J., 1(4): 1250–1278 (1978).
5) D. Pavlinov, S. Zhilina, *On orthogonality graphs of Okubo algebras*, arXiv:2601.15501 [math.RA] (2026).