

О группах, все нециклические подгруппы которых сопряжены

Научный руководитель – Чубаров Игорь Андреевич

Васюков Кирилл Владимирович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: kirill.vasukov@math.msu.ru

<p>Вероятно, первые изыскания в области минимальных групп были проведены и опубликованы Дж. Миллером (George Abrahm Miller, 1863 - 1951) и Г. Морено (Н.С. Moreno) в Трудах Американского математического общества в 1903 году. Миллер и Морено получили следующее ниже описание минимальной неабелевой группы.

T-MM: Пусть все собственные подгруппы неабелевой группы Γ являются абелевыми. Тогда справедливы утверждения:

- (I) Если порядок $|\Gamma|$ группы Γ есть степень простого числа p , то Γ изоморфна группе в какой-либо из двух серий:
 - (i) В первой серии группы неабелевы и имеют циклическую максимальную подгруппу, и все максимальные подгруппы абелевы. Известно, что для каждого порядка p^m такая группа определена однозначно, кроме случая $p = 2, m = 3$, для которого есть диэдральная и кватернионная группы порядка 8.
 - (ii) Во второй серии группы задаются тождествами $(mgt; 3)$:

$$A^{p^{m-2}} = B^p = C^p = 1, AB = BA, BC = CB, AC = CBA$$

- (II) Если порядок $|\Gamma|$ имеет хотя бы два простых делителя, то можно выбрать две силовские подгруппы Π, Ξ в Γ различных порядков так, что

$$\Gamma = \Xi \rtimes \Pi$$

с элементарной абелевой Ξ и циклической Π . При этом представление Π в векторном пространстве Ξ (над конечным простым полем) является неприводимым

Те же рассуждения, примененные Миллером и Морено, использует О.Ю. Шмидт в своем труде, посвящённом минимальным ненильпотентным группам.

T-Sh: Минимальная ненильпотентная группа Γ имеет нормальную силовскую подгруппу Ξ , а оставшиеся силовские подгруппы сопряжены с Π и циклически. В этом случае $\Gamma = \Xi \rtimes \Pi$.

Нам удалось получить обобщение понятия минимальности. Именно, мы рассматривали нециклические группы Γ , все нециклические подгруппы которых сопряжены. Такие группы мы назвали C_1 -минимальными нециклическими.

T1: Есть только три серии C_1 -минимальных нециклических групп, порядок которых имеет не меньше двух простых делителей:

- 1) $\mathbb{Z}_{p^2} \rtimes \mathbb{Z}_{q^\beta}$, причём действие дополнения на ядре имеет простой порядок q
- 2) $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_{q^\beta}$ с действием дополнения порядка q^2

- 3) $N \rtimes \mathbb{Z}_p$, N - минимальная нециклическая группа, p - простое число, взаимно простое с $|N|$

T2: Для каждого простого числа $p \neq 2$ существует только две (с точностью до изоморфизма) C_1 -минимальных нециклических p -групп: одна из них абелева $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$, другая - $\mathbb{Z}_{p^2} \rtimes \mathbb{Z}_p$. И существует единственная C_1 -минимальная нециклическая 2-группа $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \langle /p \rangle$

Источники и литература

- 1) Шмидт О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные. // Матем. сб., 31, №3-4 (1924). С. 366-372
- 2) Miller G.A., Moreno H.C. Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. // Trans. Amer. Math. Soc., 4, N4 (1903). P. 398-404