Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

# Равномерные асимптотики стоячих волн на мелкой воде в одномерном бассейне с пологими берегами и локализованной особенностью функции дна

**Научный руководитель – Миненков Дмитрий Сергеевич**

***Кутлубаева Анастасия Наримановна***

*Студент (бакалавр)*

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

*E-mail: kultubaeva13@mail.ru*

Рассматриваются стоячие волны в приближении мелкой воды в одномерном бассейне с пологими берегами с локализованной особенностью функции дна порядка h $\ll 1$, а именно спектральная задача:

$$\widehat{H}u = Eu \tag{1}$$

для следующего волнового оператора

$$\widehat{H} = -h^2 \frac{d}{dx}\, D\left(x, \frac{x-x_0}{\mu}\right) \frac{d}{dx}, \quad x \in \Omega = \{D > 0\}, |u| < \infty \tag{2}$$

в квазиклассическом пределе $h \to 0$, $\mu \in [h^2, h]$. Обозначим $y = \frac{x-x_0}{\mu}$; будем рассматривать следующую функцию дна: $\lim\limits_{y\to\pm\infty} D(x,y) = d_\pm(x)$ быстрее любой степени y и её производных, где D(x, y), $d_\pm(x)$ – гладкие функции. В работе [1] была рассмотрена задача Коши для волнового оператора, который имеет особенность в коэффициентах.

Теория канонического оператора Маслова предполагает построение асимптотик на лагранжевом многообразии, соответствующем постоянному уровню гамильтониана H. В случае, когда коэффициенты изначального уравнения имеют особенности, и геометрический объект, и условия квантования должны быть модифицированы. В работе [2] была рассмотрена спектральная задача для оператора Шредингера и был построен метод модификации канонического оператора и многообразия. Главным вопросом построения асимптотики является сшивание функций в окрестности особенности, т.е. нахождение амплитуды и поправки к ней порядка h, на которые будет действовать модифицированный канонический оператор Маслова, поскольку вне окрестнотсей решение для медленно меняющегося дна с пологими берегами известно [3]. В статье [4] в том числе рассмотрен случай, когда особенность не больше, чем длина волны, и фактически представлена равномерная асимптотика по параметру $\mu/h \le 1$, здесь мы переносим результаты на задачу отпределения собственных колебаний для волн на воде.

Результатом работы являются построенные асимптотики, равномерно зависящие от параметра $\mu/h$, и условие квантования, также были рассмотрены различные зависимости решения от параметров задачи. Авторы благодарны Аллилуевой, Лавриненко и Шафаревичу за ценные дискуссии. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

## Источники и литература

1) Allilueva A.I. Short-Wave Asymptotic Solutions of the Wave Equation with Localized Perturbations of the Velocity / A.I. Allilueva, A.I. Shafarevich // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 27, No. 2. — P. 145–154.

2) Lavrinenko I.A. Quantization of Nonsmooth Curves and the Semiclassical Spectrum of the One-Dimensional Schrödinger Operator with a Localized Perturbation of the Potential / I.A. Lavrinenko, A.I. Shafarevich // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2023. — Vol. 30, No. 2. — P. 209–218.
3) Доброхотов С.Ю. Нестандартные лагранжевы особенности и асимптотические собственные функции вырождающегося оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ / С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский // Труды МИАН. — 2019. — Т. 306. — С. 83–99.
4) Allilueva A.I. Multi-Scaled Short-Wave Asymptotic Solution of the Cauchy Problem to One-Dimensional Wave Equation with Smoothed Jump of the Velocity / A.I. Allilueva, A.I. Shafarevich // Russian Journal of Mathematical Physics, 2025, Vol. 32, No. 4, pp. 615–633.