Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Уравнение с производной Лиувилля на прямой и теория бисекториальных операторов

Научный руководитель – Федоров Владимир Евгеньевич

Скрипка Надежда Михайловна

Аспирант

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

E-mail: vio.nadezhda@ya.ru

Исследуются дифференциальные уравнения на вещественной оси, моделирующие процессы, для которых начальные условия перестают влиять на решение с течением времени (промежуточные асимптотики) [1]. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ без начальных условий, разрешенное относительно дробной производной Лиувилля D^α порядка $\alpha > 0$. Неограниченный оператор A здесь принадлежит специальному классу бисекториальных операторов $A^{\pm}_{\alpha}(\theta_0, a_0, b_0)$. Полученные абстрактные результаты применены к исследованию краевых задач для уравнений в частных производных с дробной производной Лиувилля по времени.

Построим множества: для $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ и $a \in \mathbb{R}$ определим $S^-_{\theta,a} := \{ai + re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in (-\frac{\pi}{2} - \theta, -\frac{\pi}{2} + \theta), r > 0\}$, $S^+_{\theta,a} := \{ai + re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in (\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} + \theta), r > 0\}$; для всех $a, b \in \mathbb{R}$, где $a < b$, обозначим $S_{\theta,a,b} := S^+_{\theta,a} \cap S^-_{\theta,b}$.

Определение 1. $A \in \mathcal{A}^{\pm}_{\alpha}(\theta_0, a_0, b_0)$ – бисекториален для $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_0, b_0 > 0$, если выполнены следующие два условия:

(i) $\{(-i\omega)^\alpha : \omega \in S_{\theta_0,-a_0,b_0}\} \cap \sigma(A) = \emptyset$;

(ii) для всех $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$, $a, b > 0$, таких, что $-a_0 < -a < 0 < b < b_0$, существует такая константа $c(\theta, a, b) > 0$, что для всех $\omega \in S_{\theta,a,b}$

$$\|((-i\omega)^\alpha - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{c(\theta, a, b)}{|\omega - 2a_0 i|^\alpha}.$$

Ключевую роль в построении решения играет оператор-функция

$$Z_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} ((-i\omega)^\alpha - A)^{-1} e^{-i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}^{\pm}_{\alpha}(\theta_0, a_0, b_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_0, b_0 > 0$, функция $f \in L_1(\mathbb{R}; D_A)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ в норме $\mathcal{Z}$. Тогда функция*

$$z_f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z_\alpha(t - s) f(s) ds$$

является единственным решением уравнения 1.

Работа является продолжением теории [2] для производных целого порядка.

Источники и литература

1) Barenblatt, G.I.; Zeldovich, Ya.B. Intermediate asymptotics in matematical physics. Russian Mathematical Surveys. — 1971. — Vol. 26. — Pp. 55–61.
2) FedorovV.E., Skripka N.M. Bisectorial operators and evolution equations on the real axis. Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45. — Pp. 3280–3289.