Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об уравнении Фоккера—Планка с дробными производными для обобщенного процесса Орнштейна—Уленбека

Научный руководитель – Розанова Ольга Сергеевна

Сурова Екатерина Сергеевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: ekaterina.aleshechkina@math.msu.ru

Рассмотрено уравнение Фоккера–Планка, соответствующее плотности вероятностного процесса Орнштейна-Уленбека с дробной диффузией [2]:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{D}^{\alpha}_{\theta,x} u(t,x) + \gamma \frac{\partial (x u(t,x))}{\partial x}, \tag{1}$$

где дробная производная понимается в смысле Рисса–Феллера по пространству, $\gamma \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$, $|\theta| \leq \min(\alpha, 2-\alpha)$. Решение $u(t,x) \geq 0$ подчиняется условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x) dx = 1$.
Мы изучим вопрос о существовании моментов вероятностного распределения и свойствах фундаментального решения, то есть решения задачи Коши с начальными данными $u(0,x) = \delta(x - x_0)$. Кроме того, мы изучим вопрос о существовании нетривиального стационарного решения.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть X_t - случайная величина с плотностью распределения $u(t,x)$, которая удовлетворяет дробному уравнению Фоккера-Планка (1). Её моменты обладают следующими свойствами:*

$$\mathbf{E}(X_t) = \begin{cases} x_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}, & \alpha > 1, \\ \text{не определено}, & \alpha \leq 1, \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(X_t^2) = \begin{cases} x_0^2 \mathrm{e}^{-2\gamma t} + \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\gamma t}}{\gamma}, & \alpha = 2, \theta = 0, \\ \text{не определено}, & \alpha < 2, \end{cases}$$

моменты порядка $n > 2$ не определены.

При $\alpha > 1$ существует константа $C = C(t, \alpha, \theta, \gamma) > 0$, такая что для всех $s \in (0, \alpha - 1)$ выполняется $\mathbf{E}(X_t^{1+s}) \leq \frac{C}{\alpha - 1 - s}$.

При $\alpha = 2$, $\gamma = 0$ уравнение соответствует стандартному гауссовскому распределению, а при остальных α соответствует распределению с "тяжёлыми"хвостами.

Теорема 2. *Фундаментальное решение уравнения (1) может быть записано в следующем виде:*

$$u(t,x) = A^{-\frac{1}{\alpha}}(t) F_{\theta}(A^{-\frac{1}{\alpha}}(t)(x - m(t))),$$

где $A(t) = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-\alpha \gamma t})}{\alpha \gamma}$, $m(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}$, $F_{\theta}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(qz + q^{\alpha} \sin \frac{\pi \theta}{2}\right) \mathrm{e}^{-q^{\alpha} \cos \frac{\pi \theta}{2}} dq$

При $\gamma > 0$ существует нетривиальное стационарное решение u_{∞} уравнения (1), которое может быть записано в виде

$$u_\infty(x) = (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} F_\theta((\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} x).$$

Теорема 3. *Фундаментальное решение уравнения (1) при $\gamma = 0$ имеет асимптотику*

$$u(t,x) \sim \frac{t\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \frac{\sin(\pi(\alpha-\theta)/2)}{|x|^{1+\alpha}} = \frac{C_{\alpha,\theta} t}{|x|^{1+\alpha}}, \quad |x| \to \infty,$$

а при $\gamma \neq 0$

$$u(t,x) \sim \frac{C_{\alpha,\theta} A(t)}{|x|^{1+\alpha}}, \quad |x| \to \infty.$$

Также исследуется влияние параметров задачи α, γ на вид решения.

Методы исследования могут быть применены к более широким классам уравнений Фоккера-Планка с дробными производными, для которых пока известны только численные результаты [1].

Источники и литература

1) Baumann G., Stenger F. Fractional Fokker–Planck Equation // Mathematics. 2017. T. 5. №. 1. C. 12.
2) Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics reports. 2000. T. 339. №. 1. C. 1-77.