

**Динамика асимметричного маятника с дыркой в разреженном потоке частиц**

**Научный руководитель – Давыдов Алексей Александрович**

**Зиятдинов Наиль Равильевич**

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра теории динамических систем, Москва,  
Россия

*E-mail: nail.ziatdinov@math.msu.ru*

Мы изучаем движение маятника на плоскости, представляющего собой два массивных стержня, соединенных невесомой спицей, и прикрепленного к опорной точке, вокруг которой он может свободно вращаться, в предположениях, что силы гравитации нет, но есть поток невзаимодействующих точечных частиц, движущихся с одной и той же фиксированной ненулевой скоростью и взаимодействующих со стержнем не более одного раза по закону бильярдного отражения. Наша цель - дать полное описание фазового портрета такой модели.

Путем изменения масштаба длины, мы добьемся, чтобы "большая" часть флюгера от опорной точки имела длину 1, а "меньшая" —  $(-a_0)$ , а маятник представляет собой две части:  $[a_0, a_1]$  и  $[a_2, 1]$  при  $a_i \in (-1, 1) \forall i$  и  $a_0 < a_1 < a_2$ , тогда общая длина стержня будет  $1 - a_2 + a_1 - a_0$ , аналогичным изменением масштаба времени сделаем величину скорости потока — единицей.

Обозначая через  $x, x = x(t)$ , угол, образуемый в момент времени  $t$  большей частью флюгера (от опорной точки) с направлением вектора скорости потока, придем в следующем уравнению динамики

$$\ddot{x} = -\kappa \left( \int_{a_0}^{a_1} (\sin x + r\dot{x}) |\sin x + r\dot{x}| r dr + \int_{a_2}^1 (\sin x + r\dot{x}) |\sin x + r\dot{x}| r dr \right), \quad (1)$$

где  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  первая и вторая производная от  $x$  по  $t$ , а параметр  $\kappa = \frac{2\rho}{I}$ , где  $\rho$  - плотность потока, а  $I$  моменту инерции маятника.

Интегрирование происходит по-разному в зависимости от значений  $x$  и  $\dot{x}$ . Аналогично [1] имеют место восемь случаев:

(a)  $\sin x + r\dot{x} \geq 0 \forall r$ .

$$\ddot{x} = -\kappa \left[ \frac{1 - a_2^2 + a_1^2 - a_0^2}{2} \sin^2 x + 2 \frac{1 - a_2^3 + a_1^3 - a_0^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{1 - a_2^4 + a_1^4 - a_0^4}{4} \dot{x}^2 \right] \quad (2)$$

(b<sub>1</sub>)  $\sin x + a_0\dot{x} < 0$  и  $\sin x + r\dot{x} \geq 0$  для остальных  $r$ .

$$\ddot{x} = -\kappa \left[ \frac{1 - a_2^2 + a_1^2 + a_0^2}{2} \sin^2 x + 2 \frac{1 - a_2^3 + a_1^3 + a_0^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{1 - a_2^4 + a_1^4 + a_0^4}{4} \dot{x}^2 - \frac{1}{6} \frac{\sin^4 x}{\dot{x}^2} \right] \quad (3)$$

(b<sub>2</sub>)  $\sin x + \dot{x} < 0$  и  $\sin x + r\dot{x} \geq 0$  для остальных  $r$ .

$$\ddot{x} = -\kappa \left[ \frac{-1 - a_2^2 + a_1^2 - a_0^2}{2} \sin^2 x + 2 \frac{-1 - a_2^3 + a_1^3 - a_0^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{-1 - a_2^4 + a_1^4 - a_0^4}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{6} \frac{\sin^4 x}{\dot{x}^2} \right] \quad (4)$$

(b<sub>3</sub>)  $\sin x + a_0 \dot{x} < 0$ ,  $\sin x + a_1 \dot{x} < 0$  и  $\sin x + r \dot{x} \geq 0$  для остальных  $r$ .

$$\ddot{x} = -\kappa \left[ \frac{1 - a_2^2 - a_1^2 + a_0^2}{2} \sin^2 x + 2 \frac{1 - a_2^3 - a_1^3 + a_0^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{1 - a_2^4 - a_1^4 + a_0^4}{4} \dot{x}^2 \right] \quad (5)$$

а также в четырех других областях ( $d$ ), ( $b_6$ ), ( $b_5$ ) и ( $b_4$ ), в которых результат интегрирования с точностью до знака равен значению в случаях соответственно ( $a$ ), ( $b_1$ ), ( $b_2$ ) и ( $b_3$ ) в силу симметричности модели относительно смены знака  $x$ .

Стандартным вводом новой переменной  $y = \dot{x}$  уравнение динамики перепишем в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \kappa v(x, y), \quad (6)$$

где  $v = v(x, y)$  с коэффициентом  $\kappa$  равно правой части уравнения в каждом из случаев. После этого несложно заметить, что с точностью до периода по  $x$  система имеет две особые точки:  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$ , обе вырожденные. По аналогии с [1] показываем, что эти точки топологически являются фокусом и седлом, их расположение зависит от знака коэффициента перед  $\sin^2 x$ .

### Источники и литература

- 1) Ziatdinov N.R. DYNAMICS OF AN ASYMMETRIC VANE IN A RAREFIED FLOW / N.R. Ziatdinov // Journal of Mathematical Sciences. — 2025. — 294. — p. 136–146.