Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Вероятность нахождения частицы в окрестности границы области достижимости для модели шашек Фейнмана

Научный руководитель – Данилов Владимир Григорьевич

Марычева Светлана Олеговна

Аспирант

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия

E-mail: smikhaylova@hse.ru

В работе на примере задачи о шашках Фейнмана развивается метод построения точных решений разностных задач в окрестности границы области достижимости. Переход от дискретного аргумента к непрерывному осуществляется на основе теоремы Котельникова [1]. Вводится замена переменных пространства и времени (x,t) на (y,z) (переход к светоподобным координатам, отвечающим направлениям движения частицы).

Благодаря известному распределению вероятностей на границах области достижимости задача Коши распадается на две независимые начально-краевые задачи, так что вектор-состояние исходной системы представим в виде суперпозиции $\vec{A}(y,z) = \vec{A}^{-}(y,z) + \vec{A}^{+}(y,z)$ решений начально-краевых задач с условиям на левой и правой границе области достижимости соответственно. Согласно формулировке задачи шашек Фейнмана [2] и вышеописанной замене правая краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} A_1^+(y,z+h_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1^+(y,z) + A_2^+(y,z)\right); \\ A_2^+(y,z+h_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_2^+(y-h_1,z+h_1) - A_1^+(y-h_1,z+h_1)\right); \\ A_1^+(jh_1,0) = A_1^+(0,mh_1) = A_2^+(0,mh_1) = 0, A_2^+(jh_1,0) = \frac{1}{(\sqrt{2})^j}, j\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases} \tag{1}$$

Конечно-разностные операторы сдвига допускают представление в виде псевдодифференциальных операторов [3], таким образом переходим к системам псевдодифференциальных уравнений, решение которых (на примере A^+) ищется в виде

$$\begin{pmatrix} A_1^+(y,z) \\ A_2^+(y,z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{(z-kh_1)S(p)}{h_1}} \vec{\varphi}(y,z,p)\big|_{z=kh_1} dp, \vec{\varphi}_1(y,z,p)\big|_{z=kh_1} = \sum_{j\geqslant 0} \overrightarrow{\alpha_j} e^{\frac{ip(y-jh_1)}{h_1}}, \tag{2}$$

где $S(p)$ – функция, удовлетворяющая уравнению Гамильтона-Якоби, $\overrightarrow{\alpha_j}$ – дискретная функция начально-краевого распределения вероятностей на слое $z = kh_1$. С помощью замены $\eta = exp(-ip)$ полученный интеграл сводится к контурному интегралу, что позволяется вычислить его на фиксированных слоях $z = nh$ или $y = mh$ методом вычетов. Итоговая вероятность нахождения частицы в окрестности границы области достижимости вычисляется как $\mathbb{L}^2-$норма вектора-состояния $\vec{A}(y,z)$ $(||A(y)||_{\mathbb{L}^2} = h\,|A_k|_{l^2})$.

Источники и литература

1) Маслов В.П., Данилов В.Г. Принцип двойственности Понтрягина для вычисления, эффекта типа Черенкова в кристаллах и разностных схемах. I // Труды ордена Ленина Математического института имени В. А. Стеклова. 1984. Т. 166. С. 130–160.
2) Скопенков М.Б., Устинов А.В. Шашки Фейнмана: к алгоритмической квантовой теории // Успехи математических наук. 2022. Т. 77, № 3(465). С. 73–160.
3) Chernyshev V.L., Nazaikinskii V.E., Tsvetkova A.V. Lattice Equations and Semiclassical Asymptotics // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. Vol. 30, no. 2. P. 152–164.