Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Формула регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде

Научный руководитель – Савчук Артём Маркович

Кузнецов Егор Дмитриевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет космических исследований, Москва, Россия
E-mail: egorka.kuz@yandex.ru

В работе была рассмотрена задача вычисления регуляризованного следа первого порядка для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом, введенного на трехзвенном графе-звезде. Длина каждого ребра полагается равной π, граф состоит из четырёх вершин (три концевые, центральная) и трёх рёбер. На графе вводится дифференциальный оператор L, задаваемый выражением:

$$l_\nu(y_\nu) = -y_\nu'' + q_\nu(x_\nu)y_\nu = \{-(y_\nu^{[1]})' - u_\nu y_\nu^{[1]} - u_\nu^2 y_\nu\},$$

и областью определения:

$$\mathfrak{D}(L) = \left\{ \mathbf{y} \in (AC[0,\pi])^3 \,\middle|\, y_\nu^{[1]} \in AC[0,\pi], y_\nu(0) = 0, y_1(\pi) = y_2(\pi) = y_3(\pi), \sum_{\nu=1}^{3} y_\nu^{[1]}(\pi) = 0 \right\},$$

где $\mathbf{y} \in (L_2[0,\pi])^3$, $\mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$. Аналогично определяется невозмущенный оператор L_0.

Основным результатом исследования является следующая теорема [1]:

Теорема 1. *Для оператора L с произвольным потенциалом $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ справедлива формула регуляризованного следа:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - \lambda_n^0 - b_n) = -\frac{1}{8}\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{i} h_{i,\nu}^2,$$

где числа b_n определяются как:

$$b_n = -\tfrac{2k-1}{3\pi}\int_0^\pi (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t))\sin((2k-1)t)dt, \quad n = 3k-2,$$
$$b_n = -\tfrac{2k}{3\pi}\int_0^\pi (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t))\sin(2kt)dt, \quad n = 3k-1,\, n = 3k,\, k = 1, 2, \ldots.$$

Нумерация индексом k проводится в соответствии с кратностью собственных значений. $h_{i,\nu}$ — величины скачков функций $u_\nu(x)$. λ_n и λ_n^0 собственные значения операторов L и L_0 соответственно. $\mathcal{M}$ – пространство зарядов, введенное на графе.

При определенных условиях на потенциалы $q_\nu(x_\nu)$ удается получить следующие следствия:

Следствие 1. *Если функции $q_\nu(x)$ непрерывны в концах отрезка, то формулу следа можно записать в виде*

$$(C,1)\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\lambda_n-\lambda_n^0-<\mathbf{q}>\Big]=<\mathbf{q}>-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\Big(3q_\nu(0)+q_\nu(\pi)\Big)-\frac{1}{8}\sum_{i,\nu}h_{i,\nu}^2,$$

где $<\mathbf{q}>=\frac{1}{3\pi}\int_0^\pi(q_1(x)+q_2(x)+q_3(x))\,dx$ *— среднее значение потенциала по графу, а суммирование ряда в левой части проводится методом средних или методом Абеля.*

Следствие 2. *В случае суммируемых потенциалов* $q_\nu(x)$, *непрерывных в концах отрезка, возможен переход к формуле*

$$(C,1)\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\lambda_n-\lambda_n^0-<\mathbf{q}>\Big]=<\mathbf{q}>-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3}\Big(3q_\nu(0)+q_\nu(\pi)\Big),$$

которая соответствует известной формуле Гельфанда–Левитана.

Источники и литература

1) Кузнецов Е.Д., Савчук А.М. Формула регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на трехзвенном графе // Дифференциальные уравнения. – 2026. [в печати]