Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О неединственности решения вырождающихся параболических уравнений в контексте задачи об оценке опционов в модели Хестона

Научный руководитель – Розанова Ольга Сергеевна

Бойко Руслан Ринатович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: ruslan.boiko@math.msu.ru

В работе [5] было показано, что стоимость колл-опционов в модели Хестона может определяться неединственным образом, что приводит к существованию арбитражных возможностей. Предлагается рассмотреть задачу с точки зрения математической теории краевых задач для вырождающихся на границе области параболических уравнений второго порядка, к которым относится уравнение цены опциона $V(S,v,t)$ в модели Хестона:

$$\frac{vS^2}{2}V_{SS}+\rho\sigma vSV_{Sv}+\frac{v\sigma^2}{2}V_{vv}+(r-q)SV_S+(\kappa(\theta-v)-\lambda v)V_v-rV+V_t=0.$$

Согласно теории Фикеры [4], для корректной постановки краевой задачи для рассматриваемого уравнения необходимо задать условие не только в терминальный момент времени $t=T$, но и на тех участках границы, где функция Фикеры отрицательна. Показано, что при нарушении условия Феллера $2\kappa\theta\geq\sigma^2$ таким участком является граница $v=0$, то есть отсутствие краевого условия на границе является одной из возможных причин неединственности.

Основная часть работы направлена на случай, когда условие Феллера выполнено, однако неединственность решения сохраняется. Рассматривается частный случай модели Хестона [5], для которой уравнение цены примет вид:

$$\frac{v}{2}V_{xx}+\sigma vV_{xv}+\frac{v\sigma^2}{2}V_{vv}+\left(r-\frac{v}{2}\right)V_x+\sigma^2V_v-rV+V_t=0,\quad x=\ln S. \tag{1}$$

Пример неединственности строится на основе нетривиального решения задачи Коши для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{v\sigma^2}{2}\Pi_{vv}+\sigma^2\Pi_v-r\Pi+\Pi_t=0,\quad \Pi(v,T)=0. \tag{2}$$

Данное решение имеет неограниченный рост при $v\to 0$, что указывает на необходимость выделения класса единственности ограничением поведения решения вблизи этой границы.

Цель данной работы – определить точные классы единственности для уравнения (1) на бесконечности и вблизи точек вырождения. На основе известной теории [1] построен класс единственности Тихонова-Тэклинда при $S\to\infty$, $v\to\infty$ и $S\to 0$:

$$|V(S,v,t)|\leq C\exp\left[\ln\left(\sqrt{\ln^2 S+v^2}\right)\cdot h\left(\ln\left(\sqrt{\ln^2 S+v^2}\right)\right)\right],$$

где $h(\cdot)$ – функция Тэклинда.

Для исследования поведения решения при $v\to 0$ уравнение (2) может быть приведено к уравнению типа Феллера со степенным вырождением. На основе анализа работ

[2, 3] показано, что для параметра вырождения $\alpha = 3/2$ класс единственности состоит из функций, имеющих особенность более слабую, чем $1/v$, в частности, интегрируемую.

Кроме того, построен новый пример нетривиального решения $\Pi(y, \tau) = \frac{4y}{\sigma^2} e^{-1/(2y\tau)}$, имеющий линейный рост на бесконечности и тем самым демонстрирующий, что условие сублинейного роста является не только достаточным, но и необходимым для единственности в данном случае, дополняя ранее известный пример для $\alpha = 2$.

Таким образом, установлено, что неединственность в модели Хестона может объясняться выходом решения из найденного класса единственности. Предложенные методы анализа могут быть использованы при рассмотрении поставленной задачи и для других моделей ценообразования.

Источники и литература

1) Камынин Л.И., Химченко Б.Н. О проблеме Тихонова-Петровского для параболических уравнений 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. No 5. С. 78–109.

2) Ладыкова Е.А., Розанова О.С. О неединственности в задаче об оценке опционов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2026. (в печати).

3) Ekstrom E., Tysk J. Bubbles, convexity and the Black-Sholes equation // The Annals of Applied Probability. 2009. Vol. 19. No 4. P. 1369–1384.

4) Fichera G. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order // Matematika. 1963. Vol. 7. P. 99–122.

5) Heston S.L., Loewenstein M., Willard G.A. Options and bubbles // The Review of Financial Studies. 2007. Vol. 20. P. 359–390.