Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О спектральных свойствах оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом - распределением на графе - звезде

Научный руководитель – Садовничая Инна Викторовна

Зуев Кирилл Петрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет космических исследований, Москва, Россия
E-mail: kizuev02@gmail.com

Рассматривается граф–звезда с тремя ребрами одинаковой длины π. Предполагается, что на каждом из ребер задан оператор Штурма–Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением

$$l(h) = -h'' + q(x)h$$

и краевыми условиями Дирихле. Потенциал предполагается сингулярным: $q = u'$, $u \in L_2[0,\pi]$. А именно, параметризуем каждое ребро вещественным параметром x_j, изменяющимся от 0 до π, причем значение параметров π соответствует вершине, инцидентной всем трем ребрам. В свободных концах поставим условия Дирихле: $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$, а в общей вершине — условие непрерывности $h_1(\pi) = h_2(\pi) = h_3(\pi)$ и условие Кирхгофа

$$h_1^{[1]}(\pi) + h_2^{[1]}(\pi) + h_3^{[1]}(\pi) = 0.$$

Здесь через $h^{[1]} = h' - uh$ обозначена квазипроизводная. В случае нулевого потенциала считаем $u = 0$, где u — первообразная потенциала, тогда квазипроизводная, очевидно, совпадает с обычной: $h^{[1]} = h'$.

Заметим, что спектральную задачу на графе можно свести к системе $-\mathbf{h}''+\mathbf{q}(x)\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$, где $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^T$, $\mathbf{q} = \mathrm{diag}\{q_1, q_2, q_3\}$.

В работах [1]–[2] были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора. Настоящий доклад посвящен вопросам базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций.

Теорема 1. Пусть $L_{\mathbf{u}}$ — оператор, порожденный дифференциальным выражением $\ell(\mathbf{h})$, где $\ell(\mathbf{h}) = -(\mathbf{h}^{[1]})' - \mathbf{u}\mathbf{h}^{[1]} - \mathbf{u}^2\mathbf{h}$, и краевыми условиями

$$h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0,\ h_1(\pi) = h_2(\pi) = h_3(\pi),\ h_1^{[1]}(\pi) + h_2^{[1]}(\pi) + h_3^{[1]}(\pi) = 0.$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathrm{diag}\{u_1, u_2, u_3\}$, $q_k = u_k'$ и $u_1 = u_2 = u_3 = u$. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора образует базис Рисса в пространстве $\mathfrak{H} = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi]$.

Теорема 2. Пусть теперь $\mathbf{u} = \mathrm{diag}\{u_1, u_2, u_3\}$, $q_k = u_k'$, причем функции u_1, u_2, и u_3 могут быть различны. Тогда имеет место базисность Рисса системы корневых подпространств, выбранных специальным образом в соответствии с асимптотическим поведением собственных значений.

Источники и литература

1) Зуев К.П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. I // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 2. С. 162—176.

2) Зуев К.П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. II // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 293—304.