

Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Задача быстрогодействия для уравнения Шрёдингера

Научный руководитель – Сачков Юрий Леонидович

Сорокин Фёдор Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории динамических систем, Москва,
Россия

E-mail: czedorus@mail.ru

Рассматривается задача быстрогодействия для двухуровневой квантовой системы на группе Ли $SU(2)$:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -i(H_0 + uV)q, & q &\in SU(2), & u &= u(t) \in U, \\ q(0) &= q_0 = \text{Id}, & q(t_1) &= \pm e^{-i\varphi\sigma_z}, \\ t_1 &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

где $H_0 = \sigma_z$, $V = v_x\sigma_x + v_y\sigma_y$, $v_x, v_y \in \mathbb{R}$, $v_x^2 + v_y^2 \neq 0$, $\varphi \in [0, \pi/2]$,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

На правом конце траектория должна прийти в одну из двух точек:

$$q(t_1) = e^{-i\varphi\sigma_z} \text{ или } q(t_1) = -e^{-i\varphi\sigma_z}.$$

Эта задача мотивирована приложениями в квантовой механике, возможны случаи $U = \mathbb{R}$ или $U = [-C, C]$ для заданного $C > 0$.

Специалистами по управлению квантовыми системами была высказана гипотеза: решением задачи в случае $U = \mathbb{R}$ является постоянное управление $u \equiv 0$.

Справедливость этой гипотезы означает отсутствие в задаче управления кубитом ловушек, т.е. точек локального, но не глобального экстремума, что важно для численных процедур решения задач квантового управления.

Доказано, что в этой задаче $u \equiv 0$ является экстремальным управлением. Это первый шаг в направлении доказательства гипотезы.

Однако интерес вызывает и задача с ограниченным управлением. Принципиальная разница лишь в том, что в этом случае проще доказывать существование решений. Это было сделано в работе.

Основная же часть работы посвящена вычислению экстремальных траекторий и описанию экстремальных управлений в случае ограниченного управления. При этом были применены качественные методы анализа дифференциальных уравнений, так как не все полученные системы оказались интегрируемы.

Источники и литература

- 1) Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления. URSS, М:2021.