Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Анализ асимптотического поведения решений одного уравнения Лейна—Эмдена

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Матюнина Юлия Алексеевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: ymatyunina@yandex.ru

Асимптотическое поведение решений уравнений Лейна—Эмдена и Эмдена—Фаулера являлось предметом исследований Р. Эмдена [8], Р. Фаулера [9], Р. Беллмана [2], Дж. Сансоне [6], И.Т. Кигурадзе и Т.Ф. Чантурии [4], В.М. Евтухова [3], В.А. Кондратьева [5], И.В. Асташовой [1, 7], С.А. Заболотского [10] и других.

И.В. Асташовой была сформулирована следующая теорема:

Теорема 1. [1] *Пусть v — решение уравнения*

$$v'' - B\,v' + A\,v - v\,|v|^{k-1} = 0, A > 0, B > 0, k \in \mathbb{R}, k > 1,$$

не ограниченное в окрестности точки $t_* \in [-\infty, +\infty]$. Тогда $|t_*| < \infty$ и

$$|v| \;=\; \left(b^2 + b\right)^{\frac{b}{2}}\, |t^* - t|^{-b}\, \big(1 + o(1)\big), \qquad b = \frac{2}{k-1}, \quad t \to t^*.$$

Существует решение, имеющее такую асимптотику на обоих концах области определения.

В настоящей работе теорема 1 обобщена на случай уравнения со знаком "+" перед нелинейным членом.

Теорема 2. *Для уравнения $v'' - Bv' + Av + v^k = 0$ с $A > 0$, $B > 0$ и целым $k > 1$ справедливы следующие утверждения:*

1) *Если k чётно и существует конечное $t^* \in \mathbb{R}$, в окрестности которого некоторая вещественная функция v является сингулярным решением уравнения, то это решение v обладает степенной blow-up асимптотикой вида*

$$v = C\,|t^* - t|^{-\frac{2}{k-1}}\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при } t \to t^*, \text{ где}$$

$$C^{\,k-1} = -\frac{2(k+1)}{(k-1)^2}.$$

2) *В случае нечётного k ни одно решение не может становиться бесконечным в конечное время.*

3) *В случае чётного k по крайней мере одно решение v обладает асимптотикой указанного степенного типа на обоих концах своей области определения.*

Источники и литература

1) Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание по ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.
2) Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.
3) Евтухов В.М. Об условиях неколеблемости решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып 2. С. 201–210.
4) Кигурадзе И. Т. Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неав тономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит., Москва, 1990.
5) Кондратьев В.А., Самовол В.С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 749–750.
6) Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, Т. 1,2. 1954.
7) Astashova I.V. On asymptotic behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equations // Functional Differential Equations. 2009. Vol.16 №1. P.93–115.
8) Emden R. Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Warmtheorie aufKosmologie und meteorologische Probleme. Leipzig-Berlin: Teubner, 1907.
9) Fowler R.H. Further studies of Emden's and similar differential equations // Quart. J. Math. 1931. Vol.2, no.2. P.259–288.
10) Zabolotskiy S.A. On asymptotic equivalence of Lane-Emden type differential equations and some generalizations // Functional Differential Equations. 2015. Vol.22 №3-4. P.169–177.