

Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Квазиклассическая асимптотика решения одномерного уравнения Шрёдингера с двумя точечными потенциалами

Научный руководитель – Щегорцова Ольга Александровна

Анимян Анна Артуровна

Студент (бакалавр)

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

E-mail: anaaninyan@gmail.com

Рассматривается одномерная стационарная задача рассеяния для уравнения Шрёдингера с потенциалом, представляющим собой сумму гладкой функции и двух дельта-функций, локализованных в точках x_1, x_2 :

$$-\frac{h^2}{2}\psi''(x) + V(x)\psi(x) + (\alpha_1\delta(x - x_1) + \alpha_2\delta(x - x_2))\psi(x) = E\psi(x),$$

где $h > 0$ — малый квазиклассический параметр, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $V(x)$ — гладкая функция на \mathbb{R} , $E \in \mathbb{R}$ — энергия частицы. Предполагается, что выполнено условие надбарьерности $E > \max V(x)$.

Корректное определение оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом осуществляется в рамках теории самосопряженных расширений. Область определения такого оператора требует выполнения граничных условий в точках носителя сингулярности: волновая функция должна быть непрерывна, а её производная претерпевает скачок, пропорциональный интенсивности дефекта в точке.

Стандартная квазиклассическая теория непосредственно не применима к уравнениям с сингулярными коэффициентами. Это связано с тем, что теория В.П. Маслова была разработана для уравнений с гладкими коэффициентами, тогда как наличие дельта-функций в потенциале требует модификации, в частности перестройки лагранжевых многообразий в точках сингулярности.

В работе построена квазиклассическая асимптотика решения задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера с двумя точечными дефектами. Вне точек сингулярности решение представлено в виде суперпозиции волн, бегущих в противоположных направлениях. Получены коэффициенты прохождения и отражения, описывающие эффекты, обусловленные наличием двух дефектов.

Источники и литература

- 1) Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Доклады АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.
- 2) Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
- 3) Shafarevich A.I., Shchegortsova O.A. Semiclassical asymptotics of the solution to the Cauchy problem for the Schrödinger equation with a delta potential localized on a codimension 1 surface // Proc. Steklov Inst. Math. 2020. Vol. 310. P. 304–313.