

Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О дескриптивном типе некоторых свойств колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений и систем

Научный руководитель – Быков Владимир Владиславович

Похачевский Всеволод Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва,
Россия

E-mail: pokhachevskiy@gmail.com

Определение 1. Функция $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется *колеблющейся (строго)*, если для каждого $T > 0$ при некоторых $t_2 > t_1 > T$ она на отрезке $[t_1, t_2]$ имеет хотя бы один нуль (соответственно *меняет знак внутри отрезка*, т. е. $y(a)y(b) < 0$ для некоторых $a, b \in [t_1, t_2]$).

Для заданных $t > 0$, $\varkappa \in \{-, 0, \}$ и функции y обозначим через $\nu^\varkappa(y, t)$ количество на $(0, t]$: ее *смен знака*, если $\varkappa = -$; ее *нулей*, если $\varkappa = 0$; ее *гиперкратных корней*, если $\varkappa =$ (в последнем случае некратный нуль считается 1 раз, а кратный — бесконечно много раз).

Определение 2 [5]. *Верхней (нижней) частотой Сергеева знаков или нулей* скалярной функции $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется величина

$$\hat{\omega}^\varkappa[y] \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\varkappa(y, t) \quad \left(\check{\omega}^\varkappa[y] \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\varkappa(y, t) \right),$$

при $\varkappa = -$ или $\varkappa = 0$ соответственно.

Если частота Сергеева нулей (знаков) данной функции положительна, то эта функция — колеблющаяся (строго), а обратное неверно: например, функция $y(t) = \sin \sqrt{t+1}$ — строго колеблющаяся (с простыми нулями), однако $\hat{\omega}^0(y) = \check{\omega}^0(y) = 0$.

Будем называть линейное однородное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

(строго) *колеблющимся*, если все его ненулевые решения обладают тем же свойством.

Определение 3 [7]. *Слабым верхним (нижним) показателем колеблемости знаков, нулей или гиперкорней* вектор-функции $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\hat{\nu}_\circ^\varkappa(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\varkappa(\langle x, a \rangle, t) \quad \left(\check{\nu}_\circ^\varkappa(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\varkappa(\langle x, a \rangle, t) \right),$$

при $\varkappa = -, 0, *$ соответственно, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, а звёздочка в нижнем индексе означает исключение нулевого вектора.

Определение 4. Будем называть функцию $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ *колеблющейся (строго)*, если для каждого $T > 0$ при некоторых $t_2 > t_1 > T$ для любого $a \in \mathbb{R}_*^n$ функция $\langle x, a \rangle$ имеет нуль на $[t_1, t_2]$ (меняет знак внутри него). Систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

назовём *колеблющейся (строго)*, если все её ненулевые решения обладают тем же свойством.

Вопрос: какой дескриптивный тип имеют множества колеблющихся уравнений и систем, а также колеблющихся решений?

Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ — пространство систем (2) с непрерывными $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ в компактно-открытой топологии, а $\widetilde{\mathcal{E}}^n \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n$ — подпространство, соответствующее уравнениям (1). Пусть $\iota(a, \xi)$ и $j(A, \xi)$ — решение с начальным вектором $\xi \in \mathbb{R}_*^n$ для $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ и $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$.

Далее $\mathfrak{G}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}_\delta, \mathfrak{F}_\sigma, \mathfrak{G}_{\delta\sigma}, \mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ обозначают стандартные классы Бэра подмножеств метрического пространства.

Множество уравнений, удовлетворяющих условию

$$\omega_1(a) \equiv \inf_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \hat{\nu}^-[y] > 0,$$

где $\mathcal{S}_*(a)$ — множество ненулевых решений уравнения a , является $\mathfrak{G}_{\delta\sigma}$ -множеством [4], а множества

$$\{(a, \xi) \in \widetilde{\mathcal{E}}^n \times \mathbb{R}_*^n : \hat{\omega}^0(\iota(a, \xi)) > 0\} \text{ и } \{(a, \xi) \in \widetilde{\mathcal{E}}^n \times \mathbb{R}_*^n : \hat{\omega}^-(\iota(a, \xi)) > 0\},$$

$$\{(a, \xi) \in \widetilde{\mathcal{E}}^n \times \mathbb{R}_*^n : \check{\omega}^0(\iota(a, \xi)) > 0\} \text{ и } \{(a, \xi) \in \widetilde{\mathcal{E}}^n \times \mathbb{R}_*^n : \check{\omega}^-(\iota(a, \xi)) > 0\}$$

являются $\mathfrak{G}_{\delta\sigma}$ -множествами и, соответственно, $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ -множествами [2, 1].

Теорема 1. Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения: 1) множество пар $(a, \xi) \in \widetilde{\mathcal{E}}^n \times \mathbb{R}_*^n$, отвечающих колеблющимся решениям, является $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ -множеством, а строго колеблющимся — \mathfrak{G}_δ -множеством; 2) множество строго колеблющихся уравнений (1) является \mathfrak{G}_δ -подмножеством в $\widetilde{\mathcal{E}}^n$.

Множество $\{A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n : \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \check{\nu}^*[x] > 0\}$ является \mathfrak{F}_σ -множеством [6], а множества

$$\{(A, \xi) \in \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n : \check{\nu}^*(j(A, \xi)) > 0\}, \quad \{(A, \xi) \in \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n : \hat{\nu}^*(j(A, \xi)) > 0\}$$

являются \mathfrak{F}_σ -множеством и, соответственно, $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ -множеством [3].

Теорема 2. Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения: 1) множество пар $(A, \xi) \in \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n$, отвечающих колеблющимся решениям, является $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ -множеством, а строго колеблющимся — \mathfrak{G}_δ -множеством; 2) множество строго колеблющихся систем (2) является \mathfrak{G}_δ -подмножеством в $\widetilde{\mathcal{M}}^n$.

Вопросы о возможности усилить утверждения теорем 1 и 2, а также о дескриптивном типе множеств колеблющихся уравнений и систем остаются открытыми. </p>

Источники и литература

- 1) Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320.
- 2) Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425.
- 3) Похачевский В.А., Быков В.В. О бэровской классификации слабых показателей колеблемости гиперкратных корней решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 6. С. 857–858.

- 4) Сергеев И.Н. О классах Бэра характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 6. С. 852.
- 5) Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2006. Т. 25. С. 249–294.
- 6) Сергеев И.Н. Класс Бэра крайних гиперчастот линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1569–1570.
- 7) Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.