

Секция «19.9 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Операторы Штурма-Лиувилля со сдвигом в аргументе и сингулярным потенциалом

Научный руководитель – Савчук Артём Маркович

Северцов Станислав Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет космических исследований, Москва, Россия

E-mail: stanislav.severtcov@math.msu.ru

<p>Цель настоящей доклада — дать корректное определение оператора $-y'' + q(x)y(x - b)$ для потенциалов $q \in W_2^{-1}$ и изучить базовые свойства таких операторов.

Определение 1. С дифференциальным выражением $\ell(y) = -(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x - b) - u(x)u(x - b)y(x - 2b)$, где $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x - b)$ свяжем максимальный оператор $L_{u,M}$ с областью определения

$$D(L_{u,M}) = \{y(x) \in AC[0, \pi] : y^{[1]}(x) \in AC[0, \pi], \ell(y) \in L_2[0, \pi]\}$$

и минимальный оператор $L_{u,m}$ с областью

$$D(L_{u,m}) = \{y \in D(L_{u,M}) : y(0) = y^{[1]}(0) = y(\pi) = y^{[1]}(\pi) = 0\}.$$

Теорема 1. Пусть $u(x) \in L_2[0, \pi]$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и произвольной функции $f \in L_1[0, \pi]$ уравнение $\ell(y) = \lambda^2 y + f$ с начальными условиями $y(0) = \alpha$, $y^{[1]}(0) = \beta$ имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций: $y(x), y^{[1]}(x) \in AC[0, \pi]$. Это решение непрерывно зависит в метрике пространства $AC[0, \pi] \times AC[0, \pi]$ от параметра λ , от чисел α и β и от функции f (в смысле $\|f\|_{L_1}$).

Теорема 2. Операторы $L_{u,M}$ и $L_{u,m}$ плотно определены и замкнуты в пространстве $L_2[0, \pi]$. Операторы $L_{u,m} - \lambda$ и $L_{u,M} - \lambda$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ являются фредгольмовыми с индексами (размерность ядра и коразмерность образа) $(0, 2)$ и $(2, 0)$.

Определение 2. Регулярным оператором Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом и запаздыванием в аргументе назовем оператор $L = L_{u,U}$, порожденный дифференциальным выражением $\ell(y) = -y'' + q(x)y(x - b)$, $\int q \in L_2[0, \pi]$, на области $D(L_{u,U}) = \{y \in D(L_{u,M}) : U(y) = 0\}$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями U .

Теорема 3. Любой регулярный оператор L имеет непустое резольвентное множество, спектр его дискретен, а резольвента (в точках резольвентного множества) компактна в $L_2[0, \pi]$.

Теорема 4. Пусть число b и регулярные краевые условия U фиксированы. Пусть последовательность L_2 функций u_n сходится по норме L_2 к функции u . Обозначим $L = L_{u,U}$, а $L_n = L_{u_n,U}$. Пусть точка λ лежит в резольвентном множестве оператора L . Тогда, начиная с некоторого номера N , λ попадет в резольвентные множества всех операторов L_n . Кроме того, $(L_n - \lambda I)^{-1} \rightarrow (L - \lambda I)^{-1}$ в смысле сильной операторной сходимости в $L_2[0, \pi]$.

Теорема 5. Для всякого оператора L найдется такое число $a \geq 0$, что все точки с $|\operatorname{Im} \lambda| \geq a$ относятся к резольвентному множеству (напомним, что спектральный параметр мы обозначили λ^2 , т.е. обратимым является оператор $L - \lambda^2 I$). При этом, норма резольвенты допускает оценки:

$$\|R(\lambda^2)\|_{L_2} \leq \frac{C}{|\lambda|^2}, \quad \|R(\lambda^2)\|_{L_2 \rightarrow W_2^1} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \|R(\lambda^2)\|_{W_2^{-1} \rightarrow L_2} \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Таким образом, спектр оператора L лежит внутри некоторой параболы вдоль вещественной оси.

Автор выражает искреннюю благодарность А. М. Савчуку за полезные обсуждения и замечания.

Источники и литература

- 1) А. М. Савчук, С. А. Северцов, “Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом и сдвигом в аргументе”, Дифференц. уравнения, 2026 (в печати)
- 2) А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, Т. 66. № 6. 1999.