Секция «19.8 Дискретная математика и математическая кибернетика»

Классификация одномерных однородных структур со стандартным шаблоном соседства.

Научный руководитель – Волков Николай Юрьевич

Гаспарян Алина Сергеевна
Студент (бакалавр)
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в г.Ташкенте, Ташкент, Узбекистан
E-mail: alinagasparyan090805@gmail.com

Аннотация

В работе рассматривается классификация бинарных одномерных однородных структур со стандартным шаблоном соседства. Выделяются бесконечно растущие структуры, в которых любая конечная конфигурация с течением времени заполняет всю прямую, и умирающие структуры, в которых любая конечная конфигурация с течением времени переходит в пустую.

Определения

Будем использовать определение однородной структуры из работы [1]. Используется стандартный шаблон соседства, то есть клетка с координатой x имеет 2 соседа: левого — клетку с координатой $(x-1)$ и правого — клетку с координатой $(x+1)$. У бинарной одномерной однородной структуры ячейка может находиться в состоянии 1 (черная клетка) или 0 (белая клетка). Состояние клетки в следующий момент определяется её текущим состоянием и текущими состояниями её левого и правого соседа. Всего существует 2^3=8 комбинаций состояний трёх подряд идущих клеток, то есть 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Под сокращением ОС в дальнейшем будем понимать произвольную бинарную одномерную однородную структуру.

Правилом перехода будем называть $abc \to d$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ — это состояния трёх подряд идущих клеток в произвольный момент времени t, $d \in \{0, 1\}$ — это состояние в момент $t+1$, той клетки, которая в момент времени t была в состоянии b. Легко видеть, что ОС однозначно задаётся восемью правилами перехода. Причём по определению ОС из работы [1] обязательно имеет место правило $000 \to 0$ (свойство T_0 — сохранение нуля). Остальные 7 правил перехода могут быть заданы произвольно, таким образом, всего существует 2^7=128 ОС.

Пусть произвольная ОС задана правилами $000 \to a_1$, $001 \to a_2$, $010 \to a_3$, $011 \to a_4$, $100 \to a_5$, $101 \to a_6$, $110 \to a_7$, $111 \to a_8$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 a_7, a_8$ произвольные элементы множества $\{0, 1\}$. ОС, задаваемая вышеуказанными правилами перехода, кодируется числом $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1$ в двоичной записи. При переводе этого числа в десятичную запись получим номер ОС.

Конфигурация $K(t)$ — это состояние ОС в момент времени t с конечным числом ненулевых ячеек. Пусть задана ОС и начальная конфигурация K_0, тогда $K(1) = K_0$. Легко видеть, что для любого момента $t > 1$ конфигурация в момент времени $K(t)$ однозначно определена правилами перехода.

Введем обозначения: z — номер клетки. $K_z(t)$ — состояние клетки z в момент времени t в процессе функционирования.

Определение 1. *ОС называется бесконечно растущей, если*
$\forall K_0 \;\; \forall z \in \mathbb{Z} \;\; \exists t_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall t > t_0 \colon \;\; K_z(t) = 1.$

Определение 2. *ОС называется умирающей, если*
$\forall K_0 \;\; \forall z \in \mathbb{Z} \;\; \exists t_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall t > t_0 \colon \;\; K_z(t) = 0.$

Основные результаты

Теорема 1. *Множество бесконечно растущих бинарных однородных структур состоит из единственной ОС. Это ОС номер 254, задаваемая правилами* $000 \to 0,\; 001 \to 1,\; 010 \to 1,\; 011 \to 1,\; 100 \to 1,\; 101 \to 1,\; 110 \to 1,\; 111 \to 1.$

Теорема 2. *Множество умирающих бинарных однородных структур состоит из 12 ОС, каждая из которых:*
1) Обладает следующими четырьмя правилами перехода:
$000 \to 0$, $001 \to 0$, $010 \to 0$, $100 \to 0$.
2) Имеет два правила перехода одного из следующих трёх видов:
2.1) $011 \to 1,\; 110 \to 0$;
2.2) $011 \to 0,\; 110 \to 1$;
2.3) $011 \to 0,\; 110 \to 0$.
3) Имеет правила перехода $101 \to a$, $111 \to b$, где $a, b \in \{0, 1\}$ произвольные.
Эти ОС имеют номера 0, 8, 32, 40, 64, 96, 128, 136, 160, 168, 192, 224.

Источники и литература

1) Теория автоматов: учебник для бакалавриата и магистратуры / В.Б.Кудрявцев, С.В.Алешин, А.С.Подколзин. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Издательство Юрайт, 2019. - С. 253-265. - (Бакалавр и магистр. Академический курс).