Секция «19.8 Дискретная математика и математическая кибернетика»

Сведение двумерной задачи линейного программирования к задаче нахождения расстояния по манхэттенской метрике между двумя множествами точек

Научный руководитель – Гасанов Эльяр Эльдарович

Касай Анна Алексеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия
E-mail: anna.kasai@math.msu.ru

<p>В работе рассматривается сведение задачи линейного программирования к задаче нахождения расстояния по манхэттену между двумя множествами точек. В отличие от классической формулировки, рассматривается конечное множество точек $X \subset \mathbb{Z}^2$, являющихся вершинами некоторого выпуклого многоугольника, и прямая l, тангенс угла наклона которой является рациональным числом, причем эта прямая находится вне выпуклого многоугольника. Требуется найти точку $x \in X$, которая первой будет достигнута прямой при её параллельном переносе вдоль направления нормали, или что тоже самое найти точку $x \in X$, расстояние от которой до прямой l минимально. Таких точек может быть не более двух, и назовем эти точки ответом. Фактически в этом и состоит решение задачи линейного программирования. В работе показано следующее.
1. Для точек с целочисленными координатами показано, что точка, минимизирующая расстояние до заданной прямой в манхэттенской метрике, одновременно минимизирует и евклидово расстояние. Следовательно, поиск ближайшей точки в манхэттенской метрике эквивалентен поиску ближайшей точки в евклидовой метрике, что обосновывает корректность перехода от непрерывной задачи линейного программирования к её дискретной постановке.
2. Вводится понятие рациональной прямой $l_{\text{рац.}}$ как дискретного приближения евклидовой прямой l, построенного по принципу алгоритма Брезенхема. Формализуются манхэттенское расстояние от точки до рациональной прямой и операция параллельного сдвига вдоль рационального вектора.
3. Показано, что при при любом параллельном переносе рациональной прямой $l_{\text{рац.}}$ вдоль рационального вектора в момент первого касания рациональной прямой $l_{\text{рац.}}$ с множеством X, пересечение множества X с рациональной прямой $l_{\text{рац.}}$, которое будем называть множеством кандидатов на ответ, содержит в себе ответ.
4. Установлено, что для любого натурального числа $n \geq 3$ существует такая задача линейного программирования, для которой множество кандидатов на ответ содержит не менее n точек. Тем самым показано, что в дискретном случае множество кандидатов на ответ может быть сколь угодно большим, тогда как ответ всегда содержит не более двух точек.
5. Показано, что для любой точки из множества кандидатов, возникающего при параллельном переносе рациональной прямой $l_{\text{рац.}}$ вдоль рационального вектора, евклидово расстояние до прямой l строго меньше единицы.