

## Сравнение различных методов трассировки лучей на квадраках

Научный руководитель – Кибкало Владислав Александрович

*Ионкин Вячеслав Константинович*

*Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и  
приложений, Москва, Россия  
*E-mail: ionkin-slavik@yandex.ru*

В работе рассматривается задача трассировки лучей в пространстве с непостоянной кривизной, сведённая к задаче численного моделирования бильярдноподобной системы. Данная система является классическим примером интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, для которой существуют первые интегралы движения. После этого фрагмента (теория топологической классификации таких систем подробно изложена в монографии [1]). Форма бильярдного стола в виде поверхности эллипсоида, ограниченной квадраками из софокусного семейства обеспечивает наличие дополнительных первых интегралов. Изучение таких систем представляет интерес как с точки зрения теории интегрируемых систем и топологии слоения Лиувилля, так и с точки зрения прикладных задач визуализации и трассировки лучей в неевклидовых геометриях. Более подробный обзор обобщенных бильярдов приведен в [2-3]. Моделирование подобных систем представляет особый интерес. Так, в работе [4] численное моделирование геодезического потока на эллипсоиде производилось с помощью дифференциальных нейронных сетей.

Для численного интегрирования данной системы использованы два численных метода: метод Эйлера и метод Рунге–Кутты порядка 4(5) с адаптивным шагом. Проведено сравнение точности этих методов при вычислении бильярдных траекторий на поверхности эллипсоида и в областях, ограниченных софокусными квадраками. Для анализа локальной устойчивости численного интегрирования на поверхности введена характеристика средней локальной ошибки, основанная на методе «возврата». Данный метод позволяет оценивать накопление погрешности при интегрировании траекторий, проходящих через данную точку поверхности.

Особое внимание уделено влиянию геометрических особенностей поверхности на точность численного моделирования. Оказалось, что наибольшие значения ошибки возникают в окрестности омбилических точек эллипсоида, в которых совпадают главные кривизны эллипсоида. В работе показано, что вблизи них наблюдается повышенная чувствительность геодезического потока и первых интегралов к направлению вектора скорости. Это приводит к локальному росту погрешности даже при использовании методов высокого порядка.

Основным результатом работы является демонстрация того, что учёт первых интегралов динамической системы при численном моделировании её поведения позволяет существенно повысить точность полученного решения. Численные эксперименты показывают, что учёт бильярдных интегралов позволяет уменьшить накопленную ошибку метода Рунге–Кутты в несколько раз (от трёх до восьми в зависимости от области движения), что делает данный подход эффективным инструментом для задач моделирования геодезических потоков и трассировки лучей в неевклидовых пространствах.

### Источники и литература

- 1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1–2. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
- 2) Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В. Биллиарды и интегрируемые системы // Успехи математических наук. 2023. Т. 78, № 5. С. 93–176.
- 3) Fomenko A.T., Kibkalo V.A. Topology of Liouville foliations of integrable billiards on table-complexes // European Journal of Mathematics. 2022. Vol. 8. P. 1392–1423.
- 4) Chertopolokhov V.A., Mukhamedov A., Bugriy G., Kibkalo V.A., Ionkin V.K., Tolchennikova V., Chairez I. Stable On-the-Fly Learning for Dynamic Neural Networks With Delayed Inputs // IEEE Access. 2026. Vol. 14. P. 14369–14392.