

**Кручение в гомологиях групп Торелли и гомоморфизм  
Бирман—Крэггса—Джонсона**

**Научный руководитель – Гайфуллин Александр Александрович**

*Владимиров Андрей Владимирович*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,  
Россия

*E-mail: andrejkaere1@gmail.com*

Пусть  $\Sigma_g$  – двумерная компактная ориентированная поверхность рода  $g$ . Её группой классов отображений называется группа

$$\text{Mod}(\Sigma_g) = \pi_0(\text{Homeo}^+(\Sigma_g)),$$

где  $\text{Homeo}^+(\Sigma_g)$  – группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов  $\Sigma_g$ .

Важной подгруппой группы  $\text{Mod}(\Sigma_g)$  является группа Торелли  $\mathcal{T}_g$ , состоящая из элементов  $\text{Mod}(\Sigma_g)$ , которые тривиально действуют на  $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ . Хорошо известно, что группа  $\mathcal{T}_1$  тривиальна. Месс [1] показал, что  $\mathcal{T}_2$  является бесконечно порождённой свободной группой.

Джонсон [2] показал, что группа Торелли  $\mathcal{T}_g$  конечно порождена при  $g \geq 3$ . В [3] Джонсон явно вычислил абелизацию  $H_1(\mathcal{T}_g; \mathbb{Z})$  группы Торелли при  $g \geq 3$ , и показал, что кручение в  $H_1(\mathcal{T}_g; \mathbb{Z})$  описывается гомоморфизмом Бирман—Крэггса—Джонсона  $\sigma: \mathcal{T}_g \rightarrow \mathbb{W}'_3$ , где  $\mathbb{W}'_3$  – некоторое  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -векторное пространство. Этот гомоморфизм тесно связан с инвариантом Рохлина трёхмерных гомологических сфер.

Для любого набора из  $k$  попарно не пересекающихся разделяющих простых замкнутых кривых на поверхности скручивания Дена вдоль этих кривых лежат в группе  $\mathcal{T}_g$  и попарно коммутируют. Следовательно, такому набору соответствует класс гомологий в  $H_k(\mathcal{T}_g; \mathbb{Z})$ , который называется абелевым циклом.

В докладе будет показано, что подгруппа группы  $H_k(\mathcal{T}_g; \mathbb{Z})$ , порождённая такими абелевыми циклами, является  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -векторным пространством при  $k \geq 2$  и имеет конечную размерность при  $2 \leq k \leq g - 2$  и  $g \geq 4$ .

Кроме того, будет показано, что гомоморфизм  $\sigma_*: H_k(\mathcal{T}_g) \rightarrow \wedge^k \mathbb{W}'_3$ , индуцированный гомоморфизмом Бирман—Крэггса—Джонсона, ограниченный на подгруппу, порождённую данными абелевыми циклами, является инъективным при  $g \geq 4$  и  $2 \leq k \leq g - 2$ .

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке стипендии Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (№ 25-8-2-20-1). Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. А. Гайфуллину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

### Источники и литература

- 1) G. Mess. “The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces”. *Topology* 31:4 (1992), pp. 775–790.
- 2) D. Johnson. “The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for  $\mathcal{T}$ ”. *Ann. of Math.* 118:3 (1983), pp. 423–442.
- 3) D. Johnson. “The structure of the Torelli group III: The abelianization of  $\mathcal{T}$ ”. *Topology* 24:2 (1985), pp. 127–144.