Об оценках типа Куранта для числа областей Неймана

Научный руководитель – Пенской Алексей Викторович

Кислицын Алексей Дмитриевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: aleksk2001@yandex.ru

Спектральная геометрия изучает свойства решений задач на собственные значения. В плоском евклидовом случае данные задачи можно рассмотреть в нескольких постановках, например: задача Дирихле (1) и Неймана (2) в ограниченной области Ω.

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Нодальная геометрия является классическим разделом спектральной геометрии (см. например [1, глава 4]). Она изучает свойства разбиения области Ω на нодальные области, то есть на связные компоненты $\Omega \setminus u^{-1}(0)$. Важным результатом в спектральной геометрии является теорема Куаранта, которая говорит о том, что k-ая собственная функция имеет не более чем k нодальных областей.

Недавно в статьях [2, 3] был предложен аналог нодальных областей: области Неймана. Следуя [2], мы дадим определение областей Неймана в более простом случае, когда собственная функция u продолжается до функции Мораса в область $\Omega' \supset \overline{\Omega}$. Обозначим через $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ множества седловых и критических точек функции u, а через $W^s(r)$, $W^u(r)$ устойчивое и неустойчивое множество критической точки r соответственно.

Определение 1. Линии Неймана функции Морса u это

$$\mathcal{N}(u) = \bigcup_{r \in \mathcal{S}} (W^s(r) \cup W^u(r)) \cup \mathcal{C}.$$

Определение 2. Области Неймана это связные компоненты $\Omega \setminus \mathcal{N}(u)$

В данной работе изучался вопрос о возможности оценок типа оценки Куранта для числа областей Неймана в аналитическом случае (см. [3]). Под оценкой типа Куранта мы понимаем оценку числа областей Неймана сверху через номер собственного значения. Данный вопрос был сформулирован в [2], мы получили отрицательный ответ на него.

Теорема 1. *Существует последовательность областей Ω^n такая, что первая собственная функция Дирихле для Ω^n имеет хотя бы n областей Неймана.*

Выражаю особую благодарность своему научному руководителю — Пенскому Алексею Викторовичу.

Данная работа была поддержана стипендией фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (№ 24-8-2-19-1, № 25-8-2-18-1).

Источники и литература

1) Michael Levitin, Dan Mangoubi, and Iosif Polterovich. Topics in spectral geometry, volume 237 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, [2023] ©2023.
2) Ram Band and David Fajman. Topological properties of Neumann domains. Ann. Henri Poincar ́e, 17(9):2379–2407, 2016.
3) T. V. Anoop, Vladimir Bobkov, and Mrityunjoy Ghosh. Neumann domains of planar analytic eigenfunctions, 2024. arXiv preprint arXiv:2410.07811.