Секция «19.6 Геометрия и топология»

О параболических особенностях точек возврата в псевдоевклидовой системе Жуковского

Научный руководитель – Кибкало Владислав Александрович

Якимова Екатерина Сергеевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: agureevamath@yandex.ru

Расширение топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, развитой в работах А. Т. Фоменко [1], на случай некомпактных слоев и неполных потоков гамильтоновых полей представляет интерес в силу широты класса соответствующих слоений, а также наличия таких систем в геометрии, механике и приложениях.

В настоящей работе рассматривается фазовая топология псевдоевклидового аналога системы Жуковского, являющегося обобщением волчка Эйлера с постоянным гиростатическим моментом $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Параметрами задачи служат главные моменты инерции A_1, A_2, A_3 и компоненты гиростатического момента $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Динамика задается на пуассоновом многообразии $\mathbb{R}^6(J, x)$ с функциями Казимира

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \qquad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3,$$

а также гамильтонианом H и дополнительным первым интегралом K:

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3}, \qquad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2.$$

Изучается локальный тип особенностей, отвечающих точкам возврата бифуркационной диаграммы отображения (H, K).

Рассмотрим семейство параметров, задаваемое соотношениями

$$A_2 = xA_1 + (1-x)A_3, \qquad A_1\lambda_1^2 = \frac{1-x}{x} A_3\lambda_3^2, \qquad A_2\lambda_2^2 = \beta^2 A_3\lambda_3^2, \quad 0 < x < 1, \quad \beta > 0. \tag{1}$$

Обозначим

$$X(s) := x + (1-x)s, \qquad \alpha_3 := A_3\lambda_3^2.$$

Тогда точки возврата соответствуют вещественным корням $s = s_* \neq 0$ уравнения

$$X(s)^3 \left(\frac{1-x}{x} s^3 - 1\right) + \beta^2 s^3 = 0. \tag{2}$$

Для каждого такого корня параметр t и координаты точки возврата на плоскости (h, k) выражаются явно:

$$t_* = \frac{1 - s_*}{A_1 s_* - A_3},$$

$$k_* = \alpha_3 \frac{(A_3 - A_1 s_*)^2}{(A_3 - A_1)^2} \left(\frac{1-x}{x} + \frac{\beta^2}{X(s_*)^2} - \frac{1}{s_*^2}\right),$$

$$h_* = \frac{\alpha_3}{2} \frac{(1-s_*)^2}{(A_3-A_1)^2} \left(\frac{1-x}{x} + \frac{\beta^2}{X(s_*)^2} - \frac{1}{s_*^2} \right).$$

Для класса систем с параметрами (1) удается определить тип локальной особенности точек возврата в смысле [2]. Используя устойчивость свойства параболичности относительно малых возмущений и всюду плотность выбранного класса параметров в более широкой области пространства параметров, получаем следующий результат.

Теорема 1. *В области параметров*

$$\{(A_1, A_2, A_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \min(A_1, A_3) < A_2 < \max(A_1, A_3)\}$$

все точки возврата бифуркационной диаграммы отображения (H, K) псевдоевклидового аналога системы Жуковского имеют параболический тип особенности.

Источники и литература

1) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1–2. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

2) Bolsinov A. V., Guglielmi L., Kudryavtseva E. A. Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2018. Vol. 376. No. 2131. Article 20170424.