

Эквивалентность слоений Лиувилля: бильярды с потенциалом Гука и бильярдные книжки

Научный руководитель – Ведюшкина Виктория Викторовна

Коноплёва Екатерина Вячеславовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: aikacannabis@mail.ru

В работе исследуется лиувиллева эквивалентность двух классов интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы: плоских бильярдных систем с центральным потенциалом Гука и бильярдных книжек без потенциала.

Первый класс систем представляет собой бильярд, ограниченный дугами софокусных эллипсов и гипербол. На материальную точку действует упругий потенциал

$$W(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2), \quad (1)$$

размещенный в центре семейства квадрик. При $k > 0$ реализуется притяжение к центру, при $k < 0$ — отталкивание. Согласно классификации С. Е. Пустовойтова, такие бильярды реализуют 18 различных типов слоений Лиувилля на неособых трехмерных изоэнергетических многообразиях Q^3 .

Второй класс систем — бильярдные книжки. Это динамические системы, заданные на клеточном комплексе, составленном из конечного числа плоских областей (листов), ограниченных дугами софокусных квадрик. Листы склеены вдоль общих граничных дуг (корешков), каждой из которых сопоставлена перестановка, определяющая правило перехода траектории при ударе. Такие системы являются интегрируемыми по Лиувиллю и допускают явное построение инварианта Фоменко–Цишанга.

Для сравнения структур слоений используется инвариант Фоменко–Цишанга — меченая молекула W^* . Это ориентированный граф, вершины которого соответствуют 3-атомам (классам окрестностей критических слоев), а ребра — однопараметрическим семействам регулярных торов Лиувилля. Ребра снабжены числовыми метками (r, ε, n) , задающими диффеоморфизм склейки граничных торов. Совпадение меченых молекул двух систем является необходимым и достаточным условием их лиувиллевой эквивалентности.

Теорема 1. *Из 18 классов лиувиллевой эквивалентности плоских бильярдных систем с потенциалом Гука 15 классов реализуются бильярдными книжками без потенциала. Для оставшихся трех классов (Рис.1) лиувиллева эквивалентность с классическими бильярдными книжками отсутствует: значения числовых меток (r, ε, n) не воспроизводятся в рамках конструкции классической книжки.*

Доказательство основано на прямом сопоставлении полных меченых молекул, полученных в работе Пустовойтова, с инвариантами, характерными для бильярдных книжек. Для 15 типов соответствие устанавливается конструктивно. Три исключительных случая содержат комбинации числовых меток, которые не могут быть получены при склейке листов в классической бильярдной книжке.

Таким образом, установлено, что 15 из 18 интегрируемых бильярдов с потенциалом Гук-лиувиллево эквивалентны бильярдным книжкам. Полученный результат подтверждает гипотезу А. Т. Фоменко о возможности моделирования интегрируемых систем бильярдными конструкциями и одновременно выявляет границы применимости классических книжек.

Источники и литература

- 1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск, 1999.
- 2) Фокичева В.В. Топологическая классификация интегрируемых билиардов. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2016.
- 3) Пустовойтов С.Е. Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле // Математический сборник. 2021. Т. 212, № 2. С. 81–105.

Иллюстрации

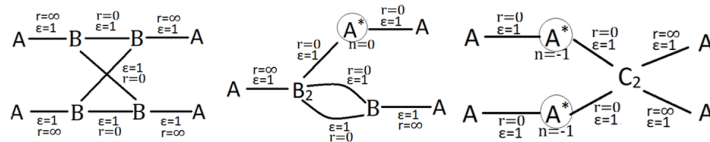


Рис. : Инварианты Фоменко–Цишанга для трех исключительных случаев



Рис. : Инвариант Фоменко-Цишанга и биллиардная книжка