

Самоподобные континуумы с бесконечным ветвлением в конечномерных пространствах

Научный руководитель – Тетенев Андрей Викторович

Кадилова Махлиё Бобохон кизи

Аспирант

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,

Новосибирск, Россия

E-mail: m.kadirova@g.nsu.ru

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ - система сжимающих подобий в \mathbb{R}^n . Непустое компактное множество $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ называется аттрактором системы \mathcal{S} , мы также говорим, что K - это самоподобное множество, относительно системы \mathcal{S} .

Мы говорим, что \mathcal{S} удовлетворяет условию открытого множества (OSC), если существует непустое открытое множество \mathcal{O} , такое, что множества $S_i(\mathcal{O})$, $i \neq j$ не пересекаются и содержатся в \mathcal{O} . Система \mathcal{S} удовлетворяет слабому условию отделимости (WSP) если I_d не является предельной точкой \mathcal{F} , где $\mathcal{F} = \{S_i^{-1}S_j : i \text{ и } j \text{ несравнимы}\}$.

Определение 1. Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых.

Теорема 1. Если \mathcal{S} — система с одноточечным пересечением, а ее граф пересечений $\Gamma(\mathcal{S})$ является деревом, то ее аттрактор K является дендритом.

Теорема 2. Пусть $(D, \rho_D), (L_1, \rho_1), (L_2, \rho_2)$ — метрические пространства. Пусть $\varphi_1(\tau, x) : D \times L_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_2(\tau, x) : D \times L_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывные функции, такие что

1) существуют $C > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\|\varphi_i(\tau, x) - \varphi_i(\tau, x')\| \leq C\rho_i(x, x')^\alpha$ для любых $\tau \in D$, $i = 1, 2$, и $x, x' \in L_i$;

2) существует $M > 0$ такое, что для каждого $x_i \in L_i, i = 1, 2$, $\tau_1, \tau_2 \in D$ и функции $\Phi(\tau, x_1, x_2) = \varphi_1(\tau, x_1) - \varphi_2(\tau, x_2)$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(\tau_2, x_1, x_2) - \Phi(\tau_1, x_1, x_2)\| \geq M\rho_D(\tau_1, \tau_2).$$

Тогда для множества $\Delta := \{\tau \in D : \varphi_1(\tau, L_1) \cap \varphi_2(\tau, L_2) \neq \emptyset\}$ справедливо неравенство

$$\dim_H \Delta \leq \min \left\{ \frac{\dim_H L_1 \times L_2}{\alpha}, \dim_H D \right\}.$$

Самоподобные дендриты в \mathbb{R}^2 имеют конечный порядок ветвления и удовлетворяют WSP. Следующая теорема показывает, что в \mathbb{R}^n это не так при $n > 2$. Эта теорема доказывается с помощью теоремы об общем положении.

Теорема 3. Существует система $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ сжимающих подобий в \mathbb{R}^5 , для которой выполняются следующие условия:

- 1) аттрактор системы \mathcal{S} является дендритом с бесконечным ветвлением;
- 2) система \mathcal{S} не удовлетворяет OSC;
- 3) аттрактор обладает свойством одноточечного пересечения.

Источники и литература

- 1) Aseev V. V., Tetenov A. V., Kravchenko A. S., *On Self-Similar Jordan Curves on the Plane*, *Siberian Mathematical Journal*, May/June 2003, Vol. 44, Issue 3, p. 379
- 2) Tetenov A., Yudin I. and Kadirova M. *Finiteness properties for self-similar continua*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S.*, 2025. doi: 10.3934/dcdss.2025057