Секция «19.6 Геометрия и топология»

Автоморфизмы рациональных комплексных момент-угол-многообразий

Научный руководитель – Панов Тарас Евгеньевич

Шенгелия Михаил Николаевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: mikhail.shengelia@mail.ru

Комплексные момент-угол-многообразия составляют класс комплексных многообразий, топологически представляющих собой момент-угол-комплексы — центральный объект изучения торической топологии. Они строятся по симплициальному вееру Σ в пространстве $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ и линейному отображению $A : \mathbb{R}^m \to N_{\mathbb{R}}$, задающему векторы на лучах. Комбинаторика Σ определяется симплициальным комплексом

$$\mathcal{K} = \{I \subset \{1, \dots, m\} : \mathrm{Cone}(a_i : i \in I) \in \Sigma\}.$$

По симплициальному комплексу строится пространство:

$$U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\}\notin\mathcal{K}} \{z \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}.$$

По отображению A строится также подгруппа G в $(\mathbb{C}^\times)^m$. Пространство $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/R$ орбит действия её вещественной формы R на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ является гладким вещественным многообразием и гомеоморфно $\mathcal{Z}$, а выбор подгруппы H в G, удовлетворяющей определённым условиям, задаёт на $\mathcal{Z}$ комплексную структуру посредством диффеоморфизма $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/R \cong U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/H$. [3]

В случае, когда веер рационален и регулярен, пространство орбит $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/G$ есть торическое многообразие V_Σ, соответствующее вееру Σ, и $\mathcal{Z} \cong U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/H$ расслаивается над V_Σ при «дофакторизации» по $G/H = F$. Это расслоение (в общем случае, слоение на $\mathcal{Z}$) называется *каноническим*. Доказано (см. [4]), что в рассматриваемом случае для компоненты единицы группы автоморфизмов имеет место короткая точная последовательность:

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \mathfrak{C}(Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})), H) \longrightarrow Aut^0(\mathcal{Z}) \longrightarrow 1, \tag{1}$$

где средний член есть централизатор подгруппы H в группе биголоморфных автоморфизмов $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ и может быть заменён на $\mathfrak{C}(Aut_{alg}(\mathbb{C}^m), G)$ – централизатор подгруппы G в группе полиномиальных автоморфизмов аффинного пространства. Это описание аналогично результату для торических многообразий, полученному в работе [1], в которой также описан средний член последовательности (1).

Отождествление конструкций канонического слоения в понимании работ [2] и [3] позволяет заключить, что всякий автоморфизм φ многоообразия $\mathcal{Z}$ спускается до автоморфизма $\pi_*^F\varphi$ пространства орбит $V_\Sigma \cong \mathcal{Z}/F$. Изучение топологии главного расслоения $\mathcal{Z} \to V_\Sigma$ позволило автору описать ядро гомоморфизма спуска π_*^F. Автором также показано, что всякий эквивариантный автоморфизм $\mathcal{Z}$ лежит в компоненте единицы группы автоморфизмов. Последним пунктам будет посвящён настоящий доклад.

Автор хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю Тарасу Евгеньевичу Панову за интерес к работе, поддержку и ценные обсуждения.

Источники и литература

1) D. Cox. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety.* J. Algebraic Geom 4 (1995), 15-50.
2) Hiroaki Ishida. *Complex manifolds with maximal torus actions.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 751 (2019), 121-184.
3) Taras Panov, Yuri Ustinovsky, Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds.* Math. Zeitschrift 284 (2016), no.1, 309-333.
4) Gregory Taroyan. *Equivariant automorphisms of the Cox construction and applications.* arXiv:2403.02465.